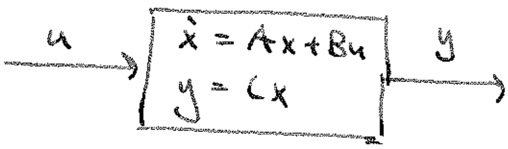
Övning 10

Robert Mattila

Teori

Tillståndsvektorn x beskriver ett systems interna tillstånd.



Styrbarhet (s. 83)

- Ett tillstånd x^* är styrbart om det finns någon insignal $u(t)$ som tar tillståndsvektorn från $x(0) = 0$ till x^* på ändlig tid.
- Matrisen $\mathcal{S} = [B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B]$ kallas styrbarhetsmatrisen.
- De styrbara tillstånden ligger i $\text{span}\{\mathcal{S}\}$.
- Systemet sägs vara styrbart om alla tillstånd är styrbara, dvs. om
  $$\text{span}\{\mathcal{S}\} = \mathbb{R}^n.$$
  I praktiken, kolla om $\det(\mathcal{S}) \neq 0$.

Gäller för system med en insignal.

Observerbarhet: (s. 173)

Vi lägger systemet (internt) i x^* och "släpper" det. Kommer det ut något?

- Ett tillstånd $x^* \neq 0$ är icke-observerbart om utsignalen är identiskt noll om $x(0) = x^*$ och ingen insignal används.

- Matrisen $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ kallas observerbarhetsmatrisen.

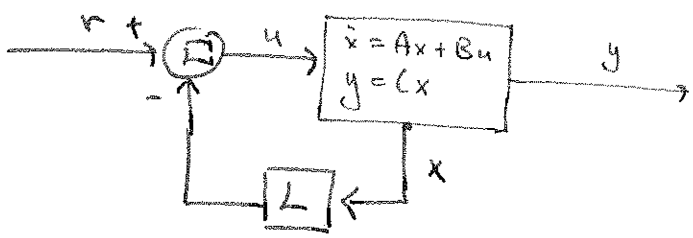
- De icke-observerbara tillstånden ligger i $\ker(\mathcal{O})$. (nollrummet)

- Systemet sägs vara observerbart om det saknar icke-observerbara tillstånd, dvs. om $\text{span}\{\mathcal{O}\} = \mathbb{R}^n$.

  I praktiken, kolla om $\det(\mathcal{O}) \neq 0$.

gäller om systemet har en utsignal

Tillståndsåterkoppling



Återkoppla systemets tillstånd istället för utsignalen.
Slutna systemet blir då

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = r - Lx\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + B(r - Lx) = Ax + Br - BLx = (A - BL)x + Br \\ y = Cx\end{cases}$$

Förra gången såg vi att systemets poler ges av egenvärdena för matrisen framför x (om ingen förkortning sker), dvs. polerna ges av egenvärden för $A - BL$ som vi kan påverka med L.

$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$ ger $G(s) = C\underbrace{(sI - A)^{-1}}_{\text{innehåller } \frac{1}{\det(sI-A)}}B$

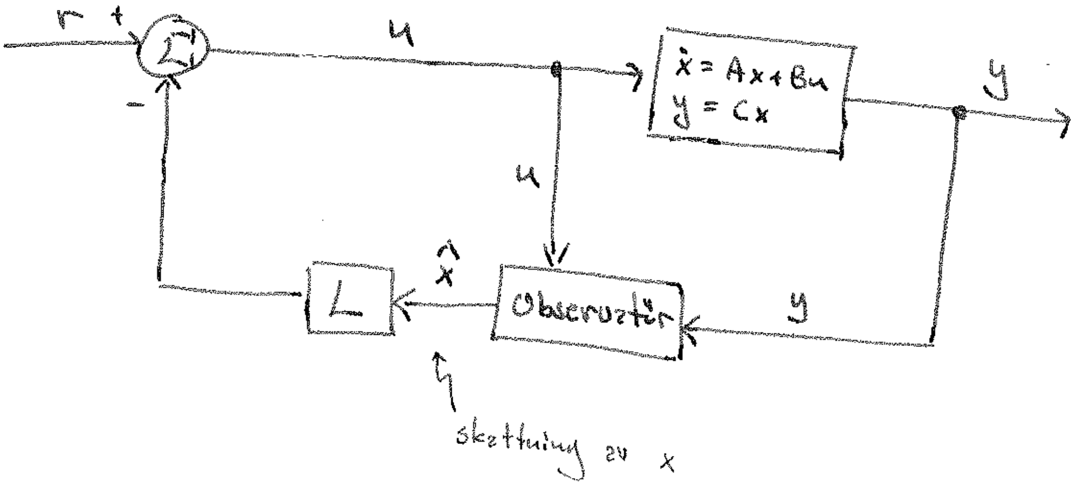
SATS (s. 183)

Är systemet styrbart kan vi placera polerna (egenvärdena) för $A - BL$ godtyckligt.

OBS: 1) Vi kan få väldigt stor styrsignal om vi gör dem för snabba.
2) Är systemet ej styrbart kan vi inte placera dem godtyckligt, men kanske ändå önskvärt.

(Tillstånds)observatör: (s. 191-193)

Ibland kan inte tillstånden mätas, utan endast en utsignal y. En observatör försöker återskapa tillståndsvektorn från mätning av utsignalen. Vi kan använda den skattade tillståndsvektorn för tillståndsåterkoppling.



Observatören är också ett dynamiskt system som "simulerar" det ursprungliga systemet och där man återkopplar med skattningsfelet i utsignalen:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{simulerar systemet}} + \underbrace{K(y - C\hat{x})}_{\text{korrigerande term.}}$$

(Observatören tror utsignalen är $\hat{y} = C\hat{x}$).

$\hat{x}$ = observatörskattning av x

Felet i skattningen av tillståndet:

$$\tilde{x} = \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{sanna}}}{x} - \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{observatörens} \\ \text{skattning}}}{\hat{x}}$$

Dynamiken för detta fel:

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = \dot{x} - \dot{\hat{x}} =$$

$$= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})] =$$

$$= Ax + \cancel{Bu} - A\hat{x} - \cancel{Bu} - Ky + KC\hat{x} = \{\text{Skriv } y = Cx\} =$$

$$= Ax - A\hat{x} - KCx + KC\hat{x} =$$

$$= (A - KC)x - (A - KC)\hat{x} =$$

$$= (A - KC)(x - \hat{x}) =$$

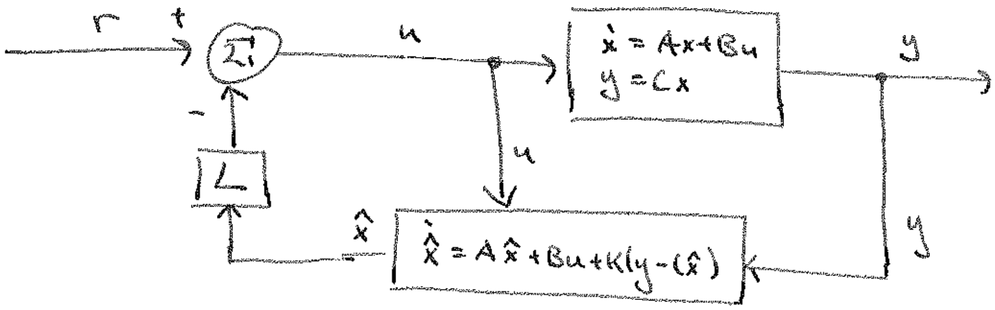
$$= (A - KC)\tilde{x}$$

Detta systems poler ges av egenvärden för $A - KC$.
Vi vill att $\tilde{x} \to 0$, dvs. att systemet ska vara stabilt (och snabbt).

SATS: s. 193

Är systemet observerbart kan vi placera $A - KC$:s egenvärden godtyckligt.

OBS: Är systemet ej observerbart kanske vi kan placera polerna önskvärt, men inte godtyckligt.


r
+
-
u
$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx$
y
u
L
$\hat{x}$
$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$
y

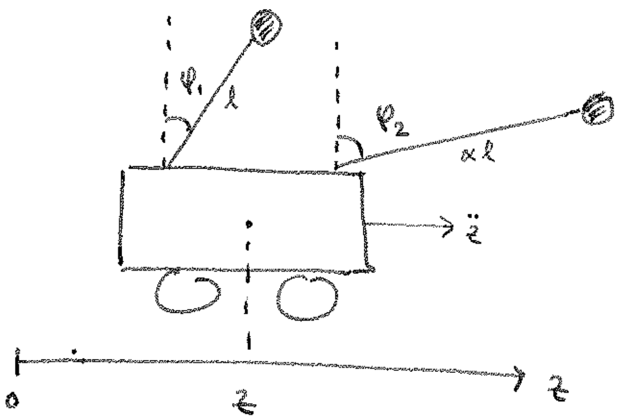
Upg 8.13

Vi kan påverka vagnen med en kraft. Newtons andra lag säger att det är som att påverka vagnens acceleration:

insignal $u = \ddot{z}$.

1, Skriv först på tillståndsform:
Inför

$$x_1 = \varphi_1$$
$$x_2 = \dot{\varphi}_1$$
$$x_3 = \varphi_2$$
$$x_4 = \dot{\varphi}_2$$



Ekvationerna

$$\begin{cases} \ddot{z}\cos\varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 l = g\sin\varphi_1 \\ \ddot{z}\cos\varphi_2 + \ddot{\varphi}_2 \alpha l = g\sin\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \{g = l = m = 1\}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}\cos\varphi_1 + \ddot{\varphi}_1 = \sin\varphi_1 \\ \ddot{z}\cos\varphi_2 + \ddot{\varphi}_2 \alpha = \sin\varphi_2 \end{cases}$$

ger då

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\varphi}_1 = \sin\varphi_1 - \ddot{z}\cos\varphi_1 = \sin x_1 - u\cos x_1$$
$$\dot{x}_3 = \dot{\varphi}_2 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{\alpha}(\sin\varphi_2 - \ddot{z}\cos\varphi_2) = \frac{1}{\alpha}(\sin x_3 - u\cos x_3)$$

dvs.

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin x_1 - u\cos x_1 \\ x_4 \\ \frac{1}{\alpha}(\sin x_3 - u\cos x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ f_3(x,u) \\ f_4(x,u) \end{bmatrix}.$$

2, Hitta jämviktspunkt kring vilken vi ska linjärisera:

Vi har $\underbrace{\text{att}}_{\text{givet}}$ $\varphi = 0$, dvs. $x_1^* = 0$ och $x_3^* = 0$.

Jämvikt betyder $\dot{x} = 0$, dvs.

$$0 = \dot{x} = f(x^*, u^*) = \begin{bmatrix} x_2^* \\ \sin x_1^* - u^*\cos x_1^* \\ x_4^* \\ \frac{1}{\alpha}(\sin x_3^* - u^*\cos x_3^*) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_2^* \\ \sin 0 - u^*\cos 0 \\ x_4^* \\ \frac{1}{\alpha}(\sin 0 - u^*\cos x_3^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^* \\ -u^* \\ x_4^* \\ -u^*/\alpha \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Jämviktspunkt:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad u^* = 0.$$

3, Linjärisere systemet runt (x^*, u^*).

Inför $\quad \Delta x = x - x^*$

$\qquad\quad \Delta u = u - u^*$.

$$\Rightarrow \quad (\dot{\Delta x}) = \frac{d}{dt}(x - \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{konstant}}}{x^*}) = \dot{x} = f(x, u) = f(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) \approx$$

$$\approx \underbrace{f(x^*, u^*)}_{=0} + \underbrace{f'_x(x^*, u^*)}_{:= A} \Delta x + \underbrace{f'_u(x^*, u^*)}_{:= B} \Delta u$$

$$= \quad A\Delta x + B\Delta u$$

där

$$A = f'_x(x^*, u^*) = \begin{bmatrix} \nabla_x^T f_1(x,u) \\ \vdots \\ \nabla_x^T f_4(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}\Bigg|_{x^*, u^*} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos x_1 + u \sin x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}(\cos x_3 + u \sin x_3) & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x^*, u^*} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{x^*,u^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha}\cos x_3 \end{bmatrix}\Bigg|_{x^*,u^*} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix}$$

dvs. det linjäriserade systemet ges av

$$(\dot{\Delta x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/\alpha \end{bmatrix} \Delta u$$

b, Är stavarna lika långa kan vi ej styra den ena annorlunda från den andra.

Ett tillstånd x_s är ej styrbart om man inte kan ta sig dit i ändlig tid från $x(0)=0$.

$x(0)$:

← pendlarna kommer båda gå likadant

Styrbarhetsmatrisen:

$$\mathcal{S} = [B \;\; AB \;\; \underbrace{A^2B}_{A(AB)} \;\; \underbrace{A^3B}_{A(A^2B)}] = \left\{ \begin{matrix} \text{Beräkna} \\ \text{rekursivt!} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Med determinant:

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^2 \\ -1/\alpha & -1/\alpha^2 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/\alpha & 0 \\ -1/\alpha & 0 & -1/\alpha^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1/\alpha & -1/\alpha^2 \end{vmatrix} + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1/\alpha & -1/\alpha^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)^2$$

som är nollskild när $\alpha \neq 1$.

$\Longrightarrow$ Pendlarna (systemet) är styrbara när deras längd ej är samma.

Upg 8.10

a,
$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{(1 \quad 3 \quad 1.5)}_{C} x$$

- **Styrbarhet:**

$$\mathcal{S} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{bmatrix}$$

Ser direkt att 2:a raden och 3:e raden är linjärt beroende. Stryk valfri vektor och se om de andra är linjärt beroende. I det här fallet: nej.

$$\Longrightarrow \dim(\operatorname{span}\{\mathcal{S}\}) = 2,$$

$$\operatorname{span}\{\mathcal{S}\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

valfria två vektorer i $\mathcal{S}$
(som ej är linjärt beroende)

<u>Observerbarhet:</u>

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ (CA)A \\ (CA^2)A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

räkna ut rekursivt!

Ser direkt att 2:a och 3:e kolumnen är linjärt beroende. 1:a och 2:a är inte det.

$\Longrightarrow \dim(\text{span}\{\mathcal{O}\}) = 2$

$\Longrightarrow \dim(\ker\{\mathcal{O}\}) = \underline{1}$

dvs. det icke-observerbara delrummet är en dimensionellt.

Vilka tillstånd är icke-observerbara?

$$\ker\{\mathcal{O}\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathcal{O}x = 0\} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ -2 & -3 & -1.5 & 0 \\ 4 & 3 & 1.5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} /1.5 \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dvs.

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Låt $x_2 = \alpha \Rightarrow x_3 = -2\alpha$.

Lösningar är på formen $\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dvs.

$$\ker\{D\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(Skippa)

b, Styrbarhet:

$$\mathcal{S} = [B \; AB \; A^2B \; A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 16 \\ -2 & 8 & -32 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{S}$ har rang = 2 (första raden är noll och dom andra två är ej multipler av varandra).

$$\Rightarrow \text{i. span}\{\mathcal{S}\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}\right\}$$

Observerbarhet:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom $\mathcal{O}$ har två linjärt oberoende vektorer

Tydligen är $\dim(\ker\{\mathcal{O}\}) = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dvs.

$$\begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 3x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker\{\mathcal{O}\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Upg 9.1

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0)\, x$$

a, Kan vi placera polerna godtyckligt vid tillståndsåterkoppling?

$$\mathcal{S} = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies$$

$$\det(\mathcal{S}) = 1 \neq 0 \implies$$

Ja! (Styrbart)

Vi använder tillståndsåterkopplingen

$$u = -Lx + r = -[l_1 \;\; l_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + r$$

Insatt i systemekvationen:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-Lx + r) =$$

$$= (A - BL)x + Br$$

Slutna systemets poler ges som egenvärden till $A - BL$:

$$A - BL = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (l_1 \;\; l_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-l_1 & -1-l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\det(A - BL - sI) = \det\left(\begin{bmatrix} -2-l_1 & -1-l_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} -2-l_1-s & -1-l_2 \\ 1 & -s \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-l_1-s)(-s) - (-1-l_2) =$$

$$= s^2 + (2+l_1)s + (1+l_2)$$

Jämför detta med de karakteristiska polynomen vi vill ha:

I) poler: $\{-3, -5\}$

$$(s+3)(s+5) = s^2 + 8s + 15$$

II) poler: $\{-10, -15\}$

$$(s+10)(s+15) = s^2 + 25s + 150$$

Vi identifierar koefficienter:

I)
$$8 = 2 + l_1 \Rightarrow l_1 = 6$$
$$15 = 1 + l_2 \Rightarrow l_2 = 14 \qquad \Longrightarrow \quad L = [l_1 \; l_2] = [6 \;\; 14]$$

II)
$$25 = 2 + l_1 \Rightarrow l_1 = 23$$
$$150 = 1 + l_2 \Rightarrow l_2 = 149 \qquad \Longrightarrow \quad L = [23 \;\; 149]$$

(dvs.

$$u_{I} = -Lx + r = -6x_1 - 14x_2 + r$$

$$u_{II} = -23x_1 - 149x_2 + r$$

)

Eftersom systemet är styrbart kan vi placera polerna godtyckligt. Dock blir styrsignalen större och större ju längre bort från origo vi placerar polerna (desto snabbare vi gör systemet). Detta sätter begränsningen eftersom styrsignaler till fysiska system är begränsade.

dynamiken för felet i tillståndsskattningen

b, Kan vi placera observatörens poler godtyckligt?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(\mathcal{O}) = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

Ja, systemet är observerbart.

Bilda observatör:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{simulerar}} + \underbrace{K(y - C\hat{x})}_{\text{korrektion}}$$

där

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm dynamiken för skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(y - C\hat{x}) = \{y = Cx\} =$$

$$= Ax - A\hat{x} - KCx + KC\hat{x} =$$

$$= (A - KC)(x - \hat{x}) = (A - KC)\tilde{x}$$

Observatörens poler (dvs. dynamiken för felet i skattningen av x) ges av egenvärden till A-KC:

$$\det(A - KC - sI) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} -2-k_1-s & -1 \\ 1-k_2 & -s \end{vmatrix} = (-s)(-2-k_1-s) + (1-k_2) =$$

$$= s^2 + (2+k_1)s + (1-k_2)$$

Man vill att observatören ska vara snabbare på att skatta systemets tillståndsvektor än vad den hinner ändra sig. Med andra ord:

observatörens poler (skattningsfelets dynamik) bör ligga längre från origo än systemets poler.

I ℓ_1, ℓ_2 vi slutna systemets poler som snabbast i −15. T.ex. kan vi då lägga observatörens i −20 (dubbelpol).

Det önskade polynomet är då

$$(s+20)(s+20) = s^2 + 40s + 400$$

Identifiering av koefficienter ger

$$40 = 2 + k_1 \implies k_1 = 38$$
$$400 = 1 - k_2 \implies k_2 = -399$$

dvs. observatören blir

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 38 \\ -399 \end{pmatrix} \left(y - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} \right).$$

Använder vi gör tillståndsåterkoppling med $\hat{x}$ istället för x får vi samma överföringsfunktion (se s. 200).