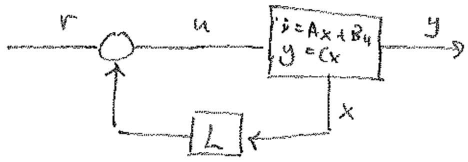
Övning 12

Robert Mattila

Förra gången

- Tillståndsåterkoppling $u = -Lx + r$ på systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$



gav ett slutet system

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

med poler vid egenvärden för $A - BL$.

- Dessa poler kan placeras godtyckligt om systemet är styrbart, dvs. om styrbarhetsmatrisen

$$S = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

har $\det(S) \neq 0$.

- Om tillståndet x inte kan mätas införs en observatör $\hat{x}$ som skattar x utifrån y:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{simulerar systemet}} + \underbrace{K(y - C\hat{x})}_{\text{korrigerande term}}$$

$= \hat{y}$

Skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ får då dynamik

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(y - C\hat{x}) =$$

$$= Ax - A\hat{x} - KCx + KC\hat{x} =$$

$$= (A - KC)(x - \hat{x}) = (A - KC)\tilde{x}$$

som har poler (dynamik) vid egenvärden för $A - KC$.

- Dessa poler kan placeras godtyckligt om systemet är observerbart, dvs. om observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

har $\det(\mathcal{O}) \neq 0$.

- Man vill att observatörens poler (skattnings-felets dynamik) ska ligga längre från origo (vara snabbare) än systemets poler.

- Tillståndsåterkopplingen och observatören kan designas oberoende av varandra (s. 199-200).

Upg. 9.4 |

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}}_{C} x$$

Vi kan designa återkopplingen och observatören oberoende av varandra.

Återkoppling

Med återkoppling $u = -Lx + r$ ges polerna för slutna systemet av egenvärdena till $A - BL$.

Kan vi placera dessa godtyckligt?

$$\mathcal{S} = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\det(\mathcal{S}) = -1 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Ja!

Polerna är (ges av)

$$\det((A - BL) - sI) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (l_1 \;\; l_2) - \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -l_1 - s & -l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 - s \end{bmatrix} \right) =$$

$$(-l_1 - s)(-1 - l_2 - s) - (-l_1)(-l_2) =$$

$$= (s+l_1)(s+1+l_2) - l_1 l_2 =$$

$$= s^2 + s(1+l_2) + s l_1 + l_1(1+l_2) - l_1 l_2 =$$

$$= s^2 + s(1+l_1+l_2) + l_1$$

Vi vill ha poler i -2 och -3, dvs. polynomet

$$(s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6.$$

Jämför koefficienter

$$s^0: \quad l_1 = 6$$

$$s^1: \quad 1 + l_1 + l_2 = 5 \Rightarrow l_2 = 5 - 1 - l_1 = -2$$

Dvs.

$$L = [6 \quad -2]$$ ger poler i $\{-2, -3\}$.

Observatör

Observatörens poler (skattningsfelets dynamik) ges av egenvärden till $A-KC$.

Kan dessa placeras godtyckligt?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Ja!}$$

Observatören bör vara snabbare än systemet, lägg t.ex. polerna i $\{-5, -5\}$. Vi vill alltså ha polynomet

$$(s+5)(s+5) = s^2 + 10s + 25.$$

Polerna är (ges av)

$$\det((A-KC)-sI) = \det\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right\} =$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} -k_1-s & k_1 \\ -k_2 & -1+k_2-s \end{pmatrix}\right) = (-k_1-s)(-1+k_2-s) - (-k_2)k_1 =$$

$$(s+k_1)(s+1-k_2) + k_1k_2 =$$

$$s^2 + s(1-k_2) + k_1 s + k_1(1-k_2) + k_1k_2 =$$

$$s^2 + s(1-k_2+k_1) + k_1$$

Identifiera koefficienter:

$s^0: \quad k_1 = 25$

$s^1: \quad 1 - k_2 + k_1 = 10 \Rightarrow k_2 = 1 + k_1 - 10 = 16$

dvs.

med $K = \begin{bmatrix} 25 \\ 16 \end{bmatrix}$ har observatören poler : $\{-5, -5\}$.

Det slutna systemet blir

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -L\hat{x} + r \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \end{cases}$$

där systemdynamikens poler är $\{-2, -3\}$ och observatörens poler $\{-5, -5\}$.

Upg. 9.8

Vill hitta tidsderivatorna av alla tillstånd, dvs. q och h.

a, Skriv systemet på tillståndsform:

$$Q(s) = \frac{k_1}{1+Ts} U(s) \implies$$

$$Q + TsQ = k_1 U \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$q + T\dot{q} = k_1 u \implies$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{T} q + \frac{k_1}{T} u$$

Givet att

$$\dot{h} = \frac{1}{A} q - \frac{1}{A} v .$$

Inför tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}$.

Vi får då

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/A \\ 0 & -1/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{T} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}$$

eller med $k_1 = 1, A = 1$ och $T = 1/2$:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{E} v$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

Inför återkopplingen $u = -Lx + r = -[l_1 \ l_2]\begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} + r$.
Slutna systemet får då poler i

$$\det\left((A - BL) - sI \right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} [l_1 \ l_2] - \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -s & 1 \\ -2l_1 & -2-2l_2-s \end{bmatrix} \right) = -s(-2-2l_2-s) - (-2l_1) =$$

$$s^2 + 2(1+l_2)s + 2l_1 .$$

Vi vill ha en dubbelpol i -2, dvs.

$$(s+2)(s+2) = s^2 + 4s + 4 .$$

Jämför koefficienter:

$$s^0: \quad 2l_1 = 4 \Rightarrow l_1 = 2$$

$$s^1: \quad 2(1+l_2) = 4 \Rightarrow l_2 = 2 - 1 = 1$$

$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ ger dubbelpol : -2.

b, Variablerna u, h, q. och v är införda så att de representerar avvikelse från ett önskat läge, dvs. vi vill ha $h = 0$.

Vid stationäritet är alla tidsderivator noll. Med återkopplingen $u = -Lx + r$ har vi systemet

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ev = Ax + B(-Lx + r) + Ev =$$

$$= (A - BL)x + Br + Ev.$$

Om $r = 0$ och $v = 0.1$ fås

$$\underbrace{0}_{\text{stationär}} = \dot{x} = (A - BL)x + B \cdot 0 + E \cdot 0.1 =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \right) x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0.1 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2-2 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0.1 = q \\ 0 = -4h - 4q \end{cases} \Rightarrow$$

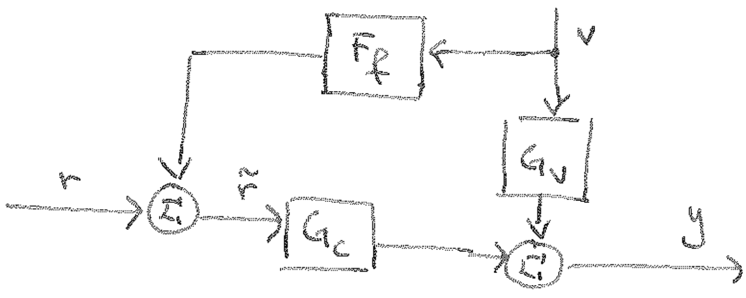
$q = -h = 0.1$ vid stationäritet, återkopplingen tog ej bort statiskt fel.

(**OBS:** Statiskt fel:

$$e = r - y = r - h = r - (-q) = r + q = \{r = 0\} =$$
$$= q = 0.1$$
)

c,

Framkoppling



Om störningen kan mätas kan det användas. Överföringsfunktioner fås ur blockschemat:

$$\underline{Y} = G_v V + G_c \tilde{R} = G_v V + G_c (R + F_f V) =$$

$$= [G_v + G_c F_f] V + G_c R$$

Väljer vi $F_f = -G_c^{-1} G_v$

syns inte störningen v i utsignalen!

Vad är G_c och G_v?

Laplacetransformera tillståndsbeskrivningen:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A-BL)x + Br + Ev = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = Cx = [1 \;\; 0]x \end{cases}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

Första ekvationen:

$$\begin{bmatrix} sH \\ sQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{V} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{V} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{V} \right) =$$

$s^2+4s+4 = (s+2)^2$

$$\frac{1}{s(s+4)+4} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{V} \right) =$$

$$\frac{1}{(s+2)^2} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2s \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} -(s+4) \\ 4 \end{bmatrix} \bar{V} \right)$$

Andra ekvationen:

$$\underline{Y} = C\underline{X} = C \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} = [1 \;\; 0] \frac{1}{(s+2)^2} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2s \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} -(s+4) \\ 4 \end{bmatrix} \bar{V} \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{(s+2)^2}}_{= G_r} R - \underbrace{\frac{s+4}{(s+2)^2}}_{G_v} \bar{V}$$

dvs.

$$G_c(s) = \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$G_v(s) = -\frac{s+4}{(s+2)^2}$$ ← obs –

Vi väljer därför framkopplingslänken som

$$F_f(s) = -G_c^{-1} G_v =$$

$$= -\frac{(s+2)^2}{2}\left(-\frac{s+4}{(s+2)^2}\right) = \frac{s+4}{2} =$$

$$= \frac{s}{2} + 2.$$

Den rent deriverande delen $\left(\frac{s}{2}\right)$ är i verkligheten opraktisk (1, ren derivata kan ej implementeras; 2, derivera mätbrus/störning n), så den stryks!

$$\tilde{F}_f(s) = 2.$$

Vi hade att $\tilde{r} = r + F_f v$ vid framkoppling,

dvs. $\tilde{r} = 0 + 2v = 2v$.

se figur på s. 12

Vad ger detta för statiskt fel?

$$0 = \dot{x} = (A - BL)x + B\tilde{r} + Ev =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 2v + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} v =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} v$$

dvs.

$$\begin{cases} q - v = 0 \\ -4h - 4q + 4v = 0 \end{cases}$$

eller $q = v$ och $h = 0$ vid stationäritet.

$\Longrightarrow$ Inget statiskt fel.

När vi bestämde $F_f = -G_c^{-1} G_v$ så vi att V inte skulle synas i y. Vår approximation $\tilde{F}_f$ gör att det stationära felet blir noll, men under den transienta fasen är V synlig i y. (Till skillnad från om vi använt F_f som helt dödar V.)

d, Kom ihåg från a, att $B = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1/T \end{bmatrix}$.

$T = 1/2$

Vi får då följande ekvation vid stationäritet:

$$0 = \dot{x} = (A - BL)x + B\tilde{r} + Ev = \{\tilde{R} = R + \tilde{F}_f \bar{v} = 2\bar{v}\} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \right) x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_1 \end{bmatrix} \cdot 2v + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} v =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4k_1 & -2-2k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4k_1 \end{bmatrix} v$$

dvs.

$$\begin{cases} q = v \\ -4k_1 h + (-2-2k_1) q + 4k_1 v = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$h = \frac{-4k_1 v + (2 + 2k_1) q}{-4k_1} = \{q = v\} =$$

$$= \frac{-4k_1 v + 2v + 2k_1 v}{-4k_1} = \frac{2k_1 v - 2v}{4k_1} =$$

$$= \frac{k_1 v - v}{2k_1} = \frac{k_1 - 1}{2k_1} v \neq 0$$

om $k_1 \neq 1$.

$\Rightarrow$ Vi får ett stationärt fel igen!

e, En PI-regulator tar bort statiskt fel.
Inför ett tillstånd som är integralen av felet och använd det i tillståndsåterkopplingen!

Låt

$$z(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$$

dvs.

$$\dot{z}(t) = h(t).$$

Kom ihåg att h är avvikelse från önskat värde. Är h=0 har vi inget fel.

Vårt utvidgade system blir då

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{q} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ q \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$(y = [1\ 0\ 0]x)$

Återkopplar vi med

$$u = -Lx + r = -[l_1\ \ l_2\ \ l_3] \begin{bmatrix} h \\ q \\ z \end{bmatrix} + r$$

Antag vi väljer stabiliserande L!

r = 0

fås

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{q} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2k_1 l_1 & -2k_1 l_2 & -2k_1 l_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A-BL} \begin{bmatrix} h \\ q \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

som är lika med noll vid stationäritet.
Vi ser (sista raden i ekvationssystemet) att

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow h = 0$$

dvs. att det stationära felet blir noll, oberoende av k_1. (Förutsatt att L är vald så att A-BL är stabil)