Övning 13

Robert Mattila

De regulatorer som vi analyserat i kursen

- PID $$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)\,d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

- Lead-lag $$U(s) = K\,\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}\,\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}\,E(s)$$

- Tillståndsåterkoppling och observatör

$$u = -Lx + r$$
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

för

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

är kontinuerliga i tid.

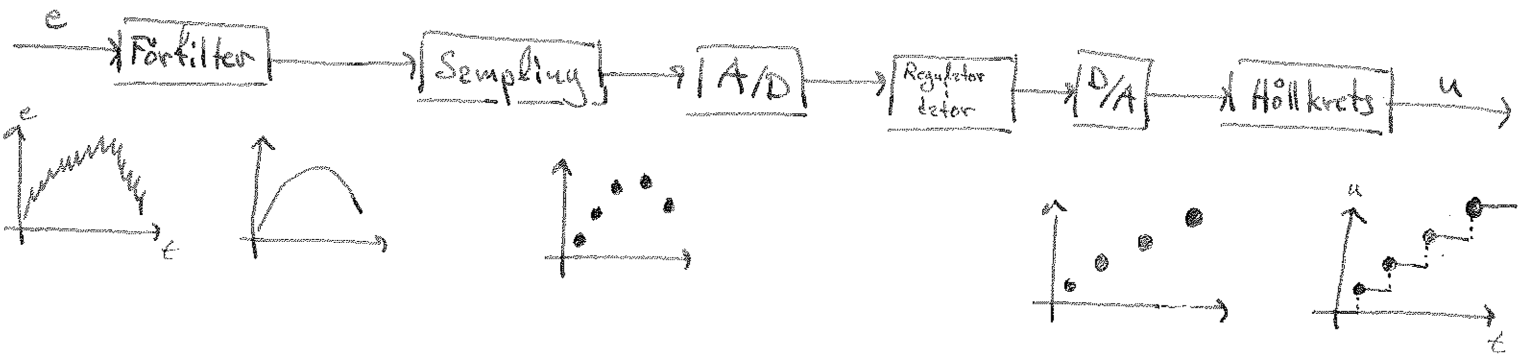
Dessa samband kan implementeras praktiskt mha. t.ex. analoga elektriska eller mekaniska kretsar.

Nuförtiden implementeras oftast regulatorer mha. datorer, som arbetar diskret.

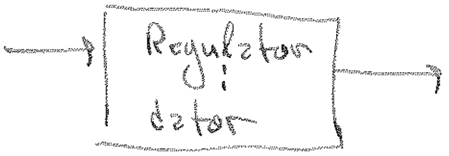
För analog implementation:
Hitta ett fysiskt system vars uppförande beskrivs av en differential-
ekvation på samma form som regulatorn. Tolka sedan värdena i
det fysiska systemet som e och u, och koppla på något sätt
samman med ~~systemet~~ systemet som
regleras. som önskas

Vid datorimplementation byts regulatorblocket

ut mot

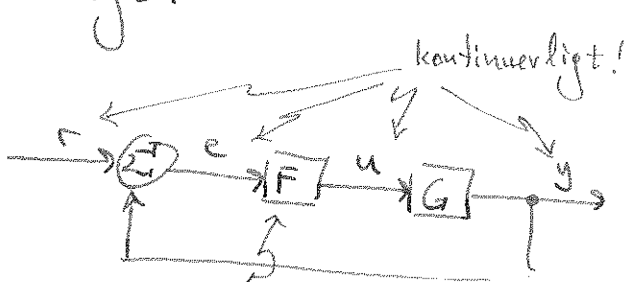


Vi approximerar de kontinuerliga differentialekvationerna som beskriver system och regulator med diskreta differansekvationer, som kan implementeras i blocket



.

OBS! Systemet vi reglerar är fortfarande kontinuerligt!



insignal (e) och utsignal (u) är kontinuerliga! Men internt implementeras regleringen diskret!

Diskret approximation av derivata

- Euler bakåt

$\Delta_e x(t) =$

$$\dot{x}(t) \approx \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)$$

- Tustins formel (rekursiv)

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$$

där

$$\frac{1}{2}\left(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\right) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)$$

och $\Delta_t x(0) = 0$.

Operatornotation

Inför

- Deriveringsoperator p:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = pX(t)$$

- Förskjutningsoperator q_T:

$$x(t+T) = q_T x(t)$$

$$x(t-T) = q_T^{-1} x(t)$$

Vi kan då omformulera Euler bakåt som

$$\dot{x}(t) = p\,x(t)$$

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}\big(x(t) - x(t-T)\big) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(1 - q_T^{-1}\right)x(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{p \approx \frac{1}{T}\left(1 - q_T^{-1}\right) \quad \text{för Euler bakåt}}$$ (10.16) s. 213

och Tustin som:

$$\frac{1}{2}\big(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\big) = \frac{1}{T}\big(x(t) - x(t-T)\big) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + q_T^{-1}\right)\Delta_t x(t) = \frac{1}{T}\left(1 - q_T^{-1}\right)x(t) \Longrightarrow$$

$$\Delta_t x(t) = \frac{2}{T}\,\frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}}\,x(t)$$

Kom ihåg $p\,x(t) = \dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$, så

$$\boxed{p \approx \frac{2}{T}\,\frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}} \quad \text{för Tustin}}\,.$$ (10.17) s. 213

Sampling

- Samplingsintervall, T
- Samplingsfrekvens, ω_s

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

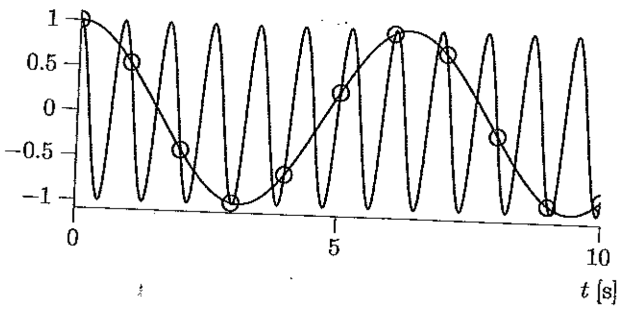
- Nyquistfrekvens, ω_N

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

dvs. halva samplingsfrekvensen.

Aliaseffekten

Vid sampling kan inte frekvenser snabbare (i.e. större) än ω_N skiljas från frekvenser under ω_N.



(s. 218)

Varje gång systemet samplas, dvs. vid $t = T, 2T, 3T, \ldots$ antar båda kurvorna samma värde.

$\Longrightarrow$ Kan ej skiljas!

Upg 11.21

Givet att $\dot{y}(t) = u(t)$ och att $u(t) = u_k$ för $kT \leq t < (k+1)T$.

Vi söker $y_{k+1} = y((k+1)T)$.

Kom ihåg

$$\underbrace{z(t)}_{} = \underbrace{z(t_0)}_{\text{värde i } t_0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \dot{z}(r)\,dr}_{\text{ändring mellan } t_0 \text{ och } t}$$

$$= z(t_0) + \left[z(r)\right]_{r=t_0}^{t} = z(t_0) + z(t) - z(t_0) = z(t)$$

Vi skriver

$$y_{k+1} = y((k+1)T) = y(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \dot{y}(r)\,dr = \{\dot{y} = u\} =$$

$$= y(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} u(r)\,dr = \left\{u \text{ konstant på detta intervall}\right\} =$$

$$= y(kT) + u_k \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} dr}_{=T} = y_k + T \cdot u_k .$$

b, P-regulatorn $u_k = -Ky_k$ insatt i föregående ekvation ger

$$y_{k+1} = y_k + Tu_k = y_k + T(-Ky_k) =$$

$$= (1-TK)y_k .$$

Vi har då rekursivt att

$$y_0 = y(0) \longleftarrow \text{given}$$

$$y_1 = (1-TK)y_0$$

$$y_2 = (1-TK)y_1 = (1-TK)(1-TK)y_0 = (1-TK)^2 y_0$$

$$\vdots$$

$$y_n = (1-TK)^n y_0$$

Systemet är stabilt om utsignalen inte går mot oändligheten, dvs.

$$\lim_{n\to\infty} |y_n| < \infty \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} |1-TK|^n |y_0| < \infty \implies \{y_0 \neq \infty\}$$

$$|1-TK| \leq 1 \implies$$

$$-1 \leq 1 - TK \leq 1 \Rightarrow$$

$$-2 \leq -TK \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{T} \geq K \geq 0$$

Upg 11.1

I tidsdomänen svarar

$$U(s) = KN \frac{s+b}{s+bN} E(s)$$

mot

$$sU(s) + bN U(s) = KN\big(sE(s) + bE(s)\big) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow}$$

$$\dot{u}(t) + bNu(t) = KN\big(\dot{e}(t) + be(t)\big).$$

Använder vi nu operatornotationen och Tustins approximation för derivata

$$p \approx \frac{2}{T}\,\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}} \qquad (10.17) \quad \text{s. } 213$$

fås

$$pu(t) + bNu(t) = KN\big(pe(t) + be(t)\big) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{T}\,\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}u(t) + bNu(t) = KN\frac{2}{T}\,\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}e(t) + KNbe(t) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{T}(1-q_T^{-1})u(t) + bN(1+q_T^{-1})u(t) = \frac{2KN}{T}(1-q_T^{-1})e(t) + KNb(1+q_T^{-1})e(t) \Rightarrow$$

$$u(t)\left[\frac{2}{T} + bN\right] + \underbrace{q_T^{-1}u(t)}_{=u(t-T)}\cdot\left[-\frac{2}{T} + bN\right] = e(t)\left[\frac{2KN}{T} + KNb\right] + \underbrace{q_T^{-1}e(t)}_{=e(t-T)}\left[-\frac{2KN}{T} + KNb\right] \Rightarrow$$

$$\left[\frac{2}{T} + bN\right]u(t) = \left[\frac{2}{T} - bN\right]u(t-T) + KN\left[\frac{2}{T} + b\right]e(t) + KN\left[-\frac{2}{T} + b\right]e(t-T)$$

dvs. om $u(t)$ löses ut

$$u(t) = \underbrace{\frac{\frac{2}{T} - bN}{\frac{2}{T} + bN}}_{= \beta_1} u(t-T) + \underbrace{KN \frac{\frac{2}{T} + b}{\frac{2}{T} + bN}}_{= \alpha_1} e(t) + \underbrace{KN \frac{-\frac{2}{T} + b}{\frac{2}{T} + bN}}_{= \alpha_2} e(t-T).$$

Vi identifierar parametrarna:

$$\beta_1 = \frac{2 - bNT}{2 + bNT}$$

$$\alpha_1 = \frac{2 + bT}{2 + bNT} NK$$

$$\alpha_2 = \frac{-2 + bT}{2 + bNT} NK$$

Upg 11.3

Vi samplar med samplingsintervall T.
Samplingsfrekvens är då $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ och
Nyquistfrekvens $\omega_N = \frac{\pi}{T}$.

Alla signaler över ω_N kommer uppfattas som lägre frekvenser.

Vår insignal är

$$u = \underbrace{u_0}_{\substack{\text{frekvens} \\ 0 < \omega < \pi/T = \omega_N}} + \underbrace{u_1}_{\substack{\text{frekvens} \\ \omega_N = \frac{\pi}{T} < \omega_2 < \frac{2\pi}{T} = \omega_s}}$$

u_0:s frekvens ligger under ω_N och kommer inte uppfattas annorlunda. u_1:s frekvens ligger över ω_N och kommer uppfattas som signal under ω_N.

Dvs.
$y = y_0 + y_1$ där y_0 fås från u_0 och y_1 från u_1.

Vårt filter är LTI, så sinus in $\rightarrow$ sinus ut gäller.

Vi är intresserade av hur u_1 övergår till y_1.

$$u_1(t) = \sin \omega_2 t \qquad \frac{\pi}{T} < \omega_2 < \frac{2\pi}{T}$$

Detta ger, innan sampling, en utsignal från filtret

$$\bar{y}_1(t) = \bar{A} \sin(\omega_2 t + \bar{\varphi})$$

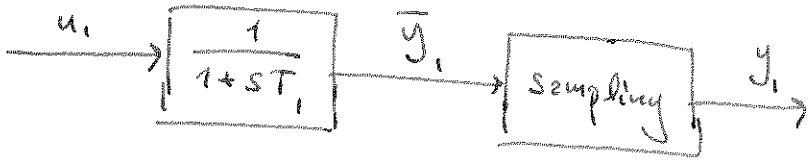
där

$$\bar{A} = |G(i\omega_2)| = \left| \frac{1}{1+sT_1} \right|_{s=i\omega_2} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}}$$

och

$$\bar{\varphi} = \arg G(i\omega_2) = \arg \frac{1}{1+i\omega_2 T_1} =$$

$$= \arg 1 - \underbrace{\arg(1+i\omega_2 T_1)} = -\arctan\left(\frac{\omega_2 T_1}{1}\right).$$



Efter sampling har vi

$$y_1(kT) = \bar{y}_1(kT) = \bar{A}\sin(\omega_2 kT + \bar{\varphi})$$

$y_1(kT)$: signalen vi uppfattar

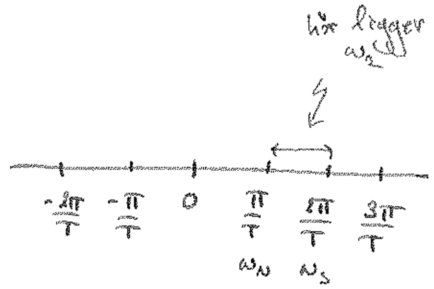
$\bar{y}_1(kT)$: den faktiska signalen vi samplar

Vi vill nu skriva om detta så att frekvensen ligger mellan noll och ω_N (eftersom vi vet att ω_2 kommer uppfattas där).

Vi gör detta genom att lägga till eller dra bort multipler av samplingsfrekvensen.

$$y_1(kT) = \bar{A}\sin(\omega_2 kT + \bar{\varphi}) =$$

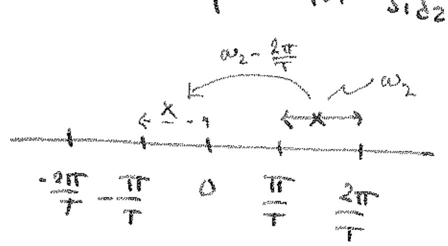
$$= \bar{A}\sin\left(\left(\omega_2 - \frac{2\pi}{T}\right)kT + \bar{\varphi}\right) =$$



obs! detta ändrar inte sinusen!

$\bar{A}\sin(\omega_2 kT - 2\pi k + \bar{\varphi}) = \bar{A}\sin(\omega_2 kT + \bar{\varphi})$

$$= \left\{ \left|\omega_2 - \frac{2\pi}{T}\right| < \omega_N \text{ men på "fel" sida om noll} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sin(-x) = \\ -\sin x \end{array} \right\} =$$



$$= -\bar{A}\sin\left(\left(\frac{2\pi}{T}-\omega_2\right)kT-\bar{\varphi}\right) = \left\{\sin(x+\pi) = -\sin x\right\} =$$

$$= \underbrace{\bar{A}}_{=A}\sin\left(\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T}-\omega_2\right)}_{=\omega_1}kT \underbrace{-\bar{\varphi}+\pi}_{=\varphi}\right) =$$

$$= A\sin(\omega_1 kT+\varphi)$$

där $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}-\omega_2$ är mellan noll och Nyquistfrekvensen, $A = \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2T_1^2}}$ och

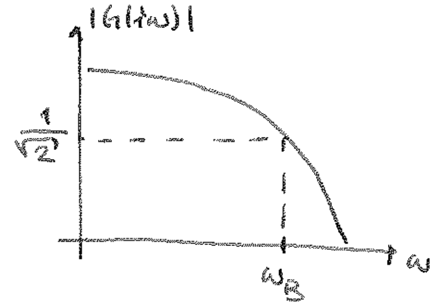
$\varphi = \pi - \bar{\varphi} = \pi - (-\arctan \omega_2 T_1) = \pi + \arctan \omega_2 T_1$.

b, u_0 passerar också vårt filter.

Med sinus in $\longrightarrow$ sinus ut får vi att alla frekvenskomponenter : u_0 skalas med en faktor

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega T_1^2}} \cdot$$

Eftersom $|G(i\omega)|$ är avtagande kommer alla frekvenser större än ω_B dämpas med mer än $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



$$\frac{1}{\sqrt{2}} = |G(i\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_B^2 T_1^2}} \quad \Longrightarrow$$

$$2 = 1 + \omega_B^2 T_1^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\omega_B = \frac{1}{T_1} \cdot$$

Vi har givet att u_0 har frekvensinnehåll mellan 0 och $\frac{\pi}{T}$, och att inget av detta ska dämpas mer än $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi}{T} \leqslant \omega_B = \frac{1}{T_1}$$

$$\Longrightarrow \quad T_1 \leqslant \frac{T}{\pi} \cdot$$

Detta värde på tidskonstanten i filtret
ger oss en minsta amplitud på

$$A = \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2 T_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2\left(\frac{T}{\pi}\right)^2}}$$

hos signalen y_1.