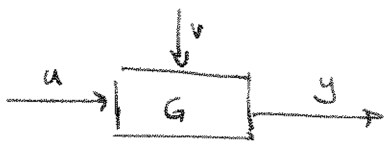
Övning 2

Robert Mattila

Kort repetition:



u - styrsignal

v - störsignal

y - utsignal

G - system

Laplacetransform av $y(t)$

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

obs. stora bokstäver och s : laplacedomän

små bokstäver och t : tidsdomän

Överföringsfunktion

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

'överför' en signal till en annan i laplacedomänen (implicit även i tidsdomän).

Linjärt system

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

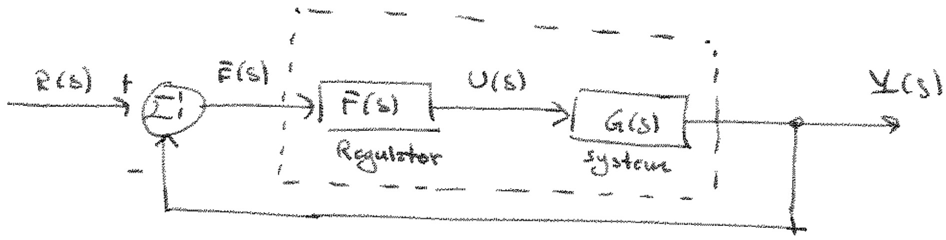
- Poler: de s för vilka $A(s) = 0$
- Nollställen: de s för vilka $B(s) = 0$
- Stabilitet: stabilt om alla poler strikt i VHP

Slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Teori

Återkopplade systemet



Öppna systemet

$G_0(s) = F(s)\,G(s)$ överför från reglerfelet till utsignalen.

Slutna systemet

överföringsfunktion från $R(s)$ till $Y(s)$:

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = G(s) \cdot F(s)\,E(s) =$$

$$= G(s)\,F(s)\left[R(s) - Y(s)\right]$$

Lös ut $Y(s)$:

$$Y(s)\left[1 + G(s)F(s)\right] = G(s)\,F(s)\,R(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{G(s)\,F(s)}{1 + G(s)\,F(s)}\,R(s) := G_c(s)\,R(s)$$

Notera att

$$G_c = \frac{G_0}{1 + G_0}.$$

PID - regulatorn

Regulatorn $F(s)$ överför reglerfelet $E(s)$ till en styrsignal $U(s)$. Ett möjligt val av $F(s)$ är PID-regulator.

Består av tre delar:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\, d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

eller

$$U(s) = \underbrace{\left[K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s\right]}_{= F(s)} E(s)$$

<u>Proportionell</u>

$$u(t) = K_P e(t)$$

Tittar på felet just nu.

+ Snabbare stegsvar
- Statiskt fel (i.e. $e(t) \neq 0$ när t stor)

Varför?

Om $e(t) = 0$ är $u(t) = 0$, dvs. vi använder ingen styrsignal. Tänk fysikaliskt.

<u>Integrerande</u>

$$u(t) = K_I \int_0^t e(\tau)\, ds$$

Tittar bakåt på felet

+ Tar bort det statiska felet ← för stegsvar!
- Kan ge svängighet

<u>Deriverande</u>

$$u(t) = K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

Tittar på framtiden, vart felet är på väg

+ Minskar svängighet
- Känsligt för (mät)brus

Upg 3.25

$(K_I = 0)$

Uten integralverkan får vi statiskt fel:

i, och iii, $\longleftrightarrow$ A och B

ii, och iv, $\longleftrightarrow$ C och D

D-delen minskar svängighet:

i, $\longleftrightarrow$ B

ii, $\longleftrightarrow$ D

iii, $\longleftrightarrow$ A

iv, $\longleftrightarrow$ C

Upg 3.1

a) Massbalans

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \text{inflöde} - \text{utflöde} = \rho x - \rho v \quad \overset{V = Ay}{\Longrightarrow}$$

$$\rho A \frac{dy}{dt} = \rho (x - v) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = A^{-1}(x - v) = \{A = 1\,m^2\} = x - v$$

Laplacetransformera

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{x - v\} \Rightarrow$$

$$sY = X - V \Rightarrow$$

$$Y = \underbrace{\frac{1}{s}}_{G_T(s)}(X - V)$$

(G_T är överföringsfunktion från totala flödet in/ut ur tanken, till vattenhöjden.)

b, Valvets överföringsfunktion, i.e. från spänning u till inflöde x i tanken, är

$$G_v(s) = \frac{k_v}{1+Ts}.$$

Tidskonstanten är positiv, så polen ligger i VHP $s = -1/T$, så G_v är stabil.

Slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s X(s) = \lim_{s\to 0} s\, G_v(s)\, U(s) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Figuren visar ett stegsvar,} \\ \text{så } U(s) = 1/s \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{k_v}{1+Ts} \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{k_v}{1+Ts} = k_v$$

Avläst från figuren:

$$\underline{k_v = 2}$$

Gå till tidsdomänen för att bestämma T:

$$X(s) = G_v(s)\, U(s) = \frac{2}{1+Ts} \frac{1}{s}$$

Invers-Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{2}{1+Ts} \frac{1}{s} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Gör t.ex. en partialbråksuppdelning} \\ \frac{2}{1+Ts}\frac{1}{s} = 2\left(\frac{-T}{1+Ts} + \frac{1}{s}\right), \text{ sedan} \\ \text{tabell A.2} \end{array} \right\}$$

$$= 2\left(1 - e^{-1/T \cdot t}\right)$$

För $t = T$:

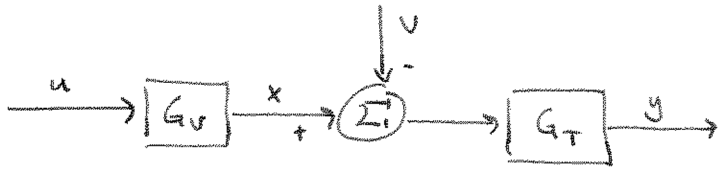
$$x(T) = 2\left(1 - e^{-1/T \cdot T}\right) = 2\left(1 - e^{-1}\right) \approx 2 \cdot 0.63 \approx 1.26$$

För vilket t är $x(t) = 1.26$?

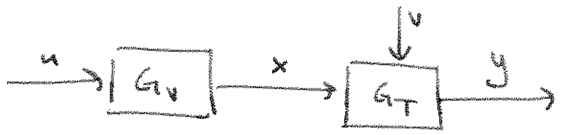
$$\Longrightarrow \underline{T \approx 5 \text{ s}}.$$

T kallas tidskonstant. Det är generellt tiden det tar för ett stegsvar att nå ~ 63% av sitt slutgiltiga värde.

c)

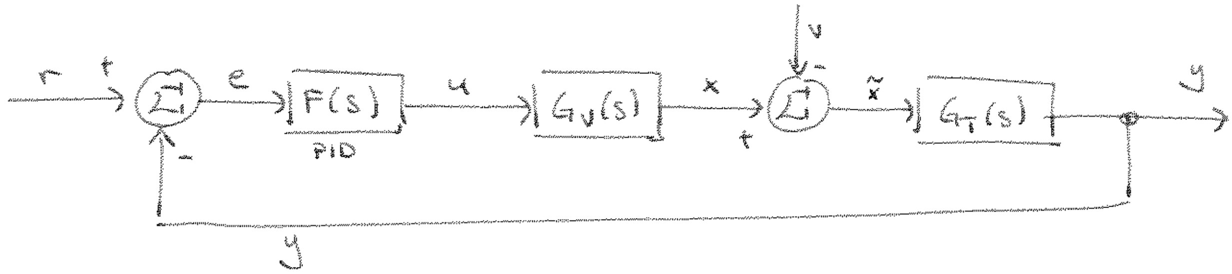


Alt. (korrekt, men inte lika noggrant)



Upg 3.2

b, Bilda reglerfelet genom att återkoppla y och låt en PID-regulator generera u utifrån felet:



c, Vandra bakåt i blockdiagramet:

$$Y = G_T \cdot \tilde{X} \qquad (1)$$

$$\tilde{X} = X - V \qquad (2)$$

$$X = G_v \cdot U \qquad (3)$$

$$U = F \cdot E \qquad (4)$$

$$E = R - Y \qquad (5)$$

Sätt in (5) i (4), (4) i (3) osv. :

$$Y = G_T(X - V) = G_T(G_v U - V) = G_T(G_v F E - V) =$$

$$= G_T(G_v F[R - Y] - V) = G_T G_v F R - G_T G_v F Y - G_T V$$

Söker överföringsfunktion till höjden y, så lös ut Y :

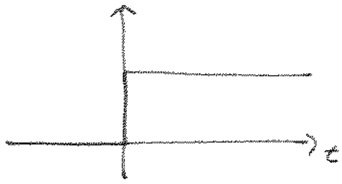
$$Y[1 + G_T G_v F] = G_T G_v F R - G_T V \Rightarrow$$

$$Y = \frac{G_T G_v F}{1 + G_T G_v F} R - \frac{G_T}{1 + G_T G_v F} V$$

Upg 3.3

b, Vi har att

$$R(s) = 5\,\frac{1}{s} \qquad V(s) = 2\,\frac{1}{s}.$$



Från de tidigare uppgifterna vet vi att

$$G_V(s) = \frac{2}{1+5s} \qquad G_T(s) = \frac{1}{s}.$$

Med regulatorn $F(s) = K_p$ får vi

$$Y(s) = \frac{G_T G_V F}{1 + G_T G_V F} R - \frac{G_T}{1 + G_T G_V F} V =$$

$$= \frac{\frac{1}{s}\frac{2}{1+5s}K_p}{1 + \frac{1}{s}\frac{2}{1+5s}K_p} \cdot 5\,\frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}\frac{2}{1+5s}K_p} \cdot 2\,\frac{1}{s} =$$

$$= \frac{10K_p}{5s^2 + s + 2K_p}\,\frac{1}{s} - \frac{10s+2}{5s^2 + s + 2K_p}\,\frac{1}{s} =$$

$$= \frac{10K_p - 2 - 10s}{5s^2 + s + 2K_p}\,\frac{1}{s}$$

$Y(s)$ är stabil om $K_p > 0$, så vi kan använda slutvärdessatsen.

Sida 45 och 37:
$a_0 s^2 + a_1 s + a_2$ är stabilt omm
$a_0 > 0$, $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$.
dvs. om alla koefficienter är positiva.

Vi har

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{10K_p - 2 - 10s}{5s^2 + s + 2K_p}\,\frac{1}{s} =$$

$$= \frac{10K_p - 2}{2K_p} = 5 - \frac{1}{K_p}.$$

Vår referens är $r(t) = 5$, så vi har ett statiskt fel på

$$5 - (5 - 1/K_p) = 1/K_p.$$

Slutsats:

Med bara P-del får vi i allmänhet ett statiskt fel. Felet kan göras litet genom att vrida upp K_p, dock fås oscillationer.

För $K_p = 0.02$ är polerna -0.055 och -0.145.
Reella, negativa: stabila, inga oscillationer.

För $K_p = 1$ är polerna $-0.1 \pm 0.624i$.
Komplexa, VHP: stabila, stor imaginärdel ger kraftiga oscillationer.

c) Antag istället PI-regulator, i.e.

$$F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s}.$$

Samma räkningar som ovan ger att

$$Y(s) = \frac{G_T G_V F}{1 + G_T G_V F} R - \frac{G_T}{1 + G_T G_V F} V =$$

$$= \frac{\frac{1}{s} \frac{2}{1+5s}\left(K_P + \frac{K_I}{s}\right)}{1 + \frac{1}{s}\frac{2}{1+5s}\left(K_P + \frac{K_I}{s}\right)} \cdot \frac{5}{s} - \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}\frac{2}{1+5s}\left(K_P + \frac{K_I}{s}\right)} \cdot \frac{2}{s} =$$

$$= \frac{10\left(K_P + \frac{K_I}{s}\right) - 2 - 10s}{s + 5s^2 + 2K_P + 2\frac{K_I}{s}} \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{10(K_P s + K_I) - 2s - 10s^2}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} \frac{1}{s}$$

Obs. slutvärdessatsen tillåter en pol i origo.
Se s. 35: Alla nollskilda poler ska ha negativ realdel!

Antag att systemet är stabilt för valda K_I och K_P (måste kollas!), så vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{10(K_P s + K_I) - 2s - 10s^2}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} =$$

$$= \frac{10K_I}{2K_I} = 5$$

Slutsats: Inget statiskt fel med integralverkan, men riskerar instabilitet!