Övning 5

Robert Mattila

Förra gången

Relativ dämpning

Skriv systemet på formen

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

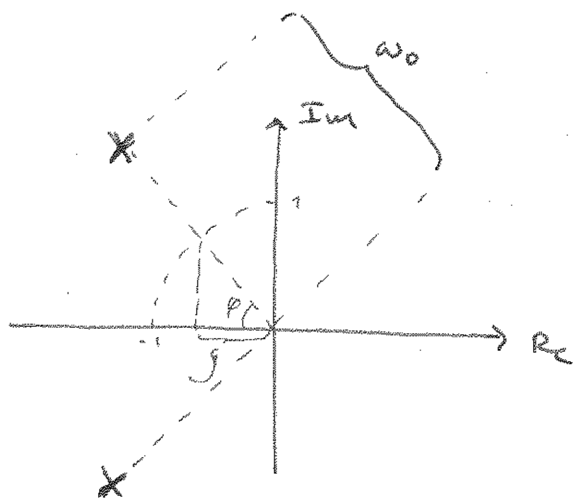
ω_0 = polernas avstånd till origo

större $\omega_0 \longrightarrow$ snabbare system

$\zeta = \cos(\varphi)$, där φ är vinkeln till polerna

= relativ dämpning

större $\zeta \longrightarrow$ mindre $\frac{|\text{Im-del}|}{|\text{Re-del}|} \longrightarrow$ bättre dämpat



Rotort

Skiss över hur polerna för ett system beror på en parameter. 10-stegs algoritm för att rita.

Teori:

Rotort: Det återkopplade systemets stabilitet undersöks genom att betrakta det slutna systemets överföringsfunktion.

Nyquist: Det återkopplade systemets stabilitet undersöks genom att betrakta det öppna systemets överföringsfunktion.

Argumentvariationsprincipen (s. 234 - 235)

- $f(z)$ analytisk funktion (så när som på ändligt antal poler).
- γ kurva i $\mathbb{C}$ som är sluten, riktad moturs och ej skär sig själv

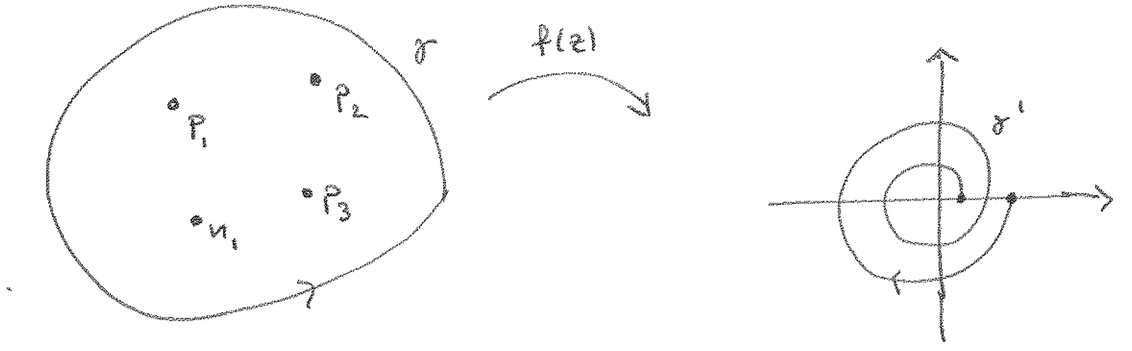
Då gäller

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var}_{\gamma} \arg f(z),$$

där N = antal nollställen hos f ; området γ omsluter
P = antal poler ——— " ———

$\frac{1}{2\pi} \operatorname{var}_{\gamma} \arg f(z)$ = antal varv kurvan γ', som fås av $f(z)$ då z antar alla värden på γ, omcirklar origo räknat moturs

Omcirklingar av γ' räknas åt samma håll som γ.
γ medurs $\Rightarrow$ γ' omc. medurs



$N - P = 1 - 3 = -2$ = 2 varv <u>medurs</u>

<u>Nyquist</u> (s. 73-78)

Återkopplat system:

$$G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}.$$

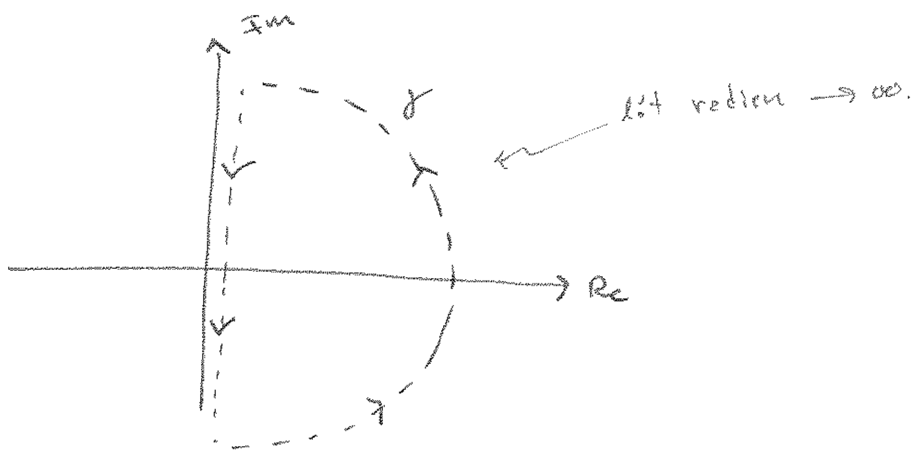
Polerna för $G_c(s)$ ges av nollställen till $1 + G_o(s)$.

<u>Fråga:</u>

Har $1 + G_o(s)$ några nollställen i HHP?

<u>Svar!</u>

Låt kurvan γ omsluta HHP och använd argumentvariationsprincipen.



Låt $f(z) = 1 + G_0(z)$.

Då ger A.v.principen att

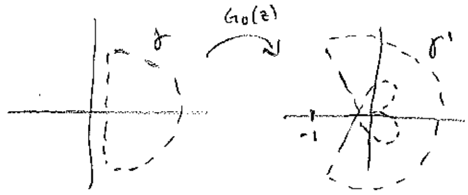
$$\#\text{ varv } 1+G_0(z) \text{ går runt origo} = \underbrace{\#\text{ nollställen för } 1+G_0(z) \text{ i HHP}}_{= \#\text{ poler för slutna systemet i HHP } = P_c} - \underbrace{\#\text{ poler för } 1+G_0(z) \text{ i HHP}}_{= \#\text{ poler för öppna systemet i HHP } = P_o}$$

Om $G_0(z)$ har en pol så har även $1+G_0(z)$ en pol där!

Vi betraktade avbildningen $f(z) = 1 + G_0(z)$, som har förskjutit avbildningen $g(z) = G_0(z)$ en enhet.

Ekvivalent med

$$\#\text{ varv } G_0(z) \text{ går runt } -1 = P_c - P_o$$



som ger Nyquistkriteriet:

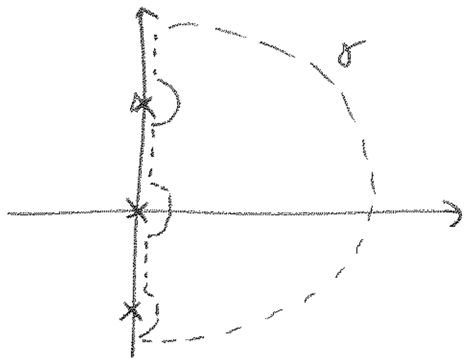
$$\boxed{P_c = P_o + \#\text{ varv } \underset{(\gamma')}{G_0} \text{ gör runt } -1}$$

antal poler i HHP för slutna systemet

antal poler i HHP hos öppna systemet

Obs:

Om G_0 har poler på imaginära axeln måste de uteslutas från γ, annars gäller ej A.V. principen:



Nyquistkurva

Räcker ofta med att enbart rita $G_0(i\omega)$ för $\omega \geq 0$ för att lista ut hur många varv kurvan gör runt -1.

Trick!

För att räkna varv runt -1:
Låtsas att det sitter en spik i -1 och ett snöre är fäst i origo. Sätt den andra änden på kurvan och följ den. Räkna sedan antal varv snöret är lindat runt spiken.

Upg 3.151

Vi har givet att öppna systemet är

$$G_o(s) = KG(s)$$

och att $G(s)$ ej har poler i HHP.

$\Longrightarrow$ $G_o(s)$ har inga poler i HHP.

a) Med $K=1$, blir slutna systemet stabilt?

Använd Nyquistkriteriet:

$$P_c = P_o + \# \text{ varv Nyquistkurvan av } G_o \text{ gör runt } -1$$

(dvs. γ')

Men $P_o = 0$ så

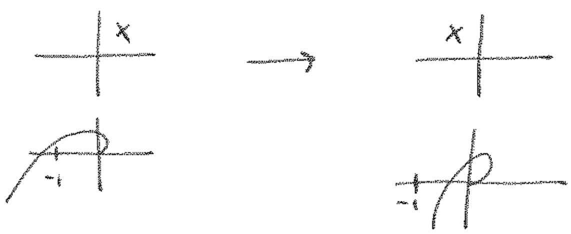
$$P_c = \# \text{ varv för } G_o^{(\gamma')} \text{ runt } -1 .$$

Dvs. det slutna systemet är stabilt om Nyquistkurvan ej omcirklar -1.

Parentes

Om # varv runt -1 är noll så vet vi att slutna systemet ej har poler i HHP. Men kan det inte ligga nån på Im-axeln?

1) Flytta en instabil pol för slutna systemet från HHP till VHP:



en omcirkling — noll omcirklingar

På gränsen då polen ligger på Im-axeln skär Nyquistkurvan -1.

2, Ligger en pol på Im-axeln kommer avbildningen från γ via G_0 till γ' att gå över den. En pol uppfyller $1 + G_0(z) = 0$.
Mappningen $G_0(z)$ av polen kommer skicka den till -1.
dvs. Nyquistkurvan Dvs. Nyquistkurvan kommer skära -1.

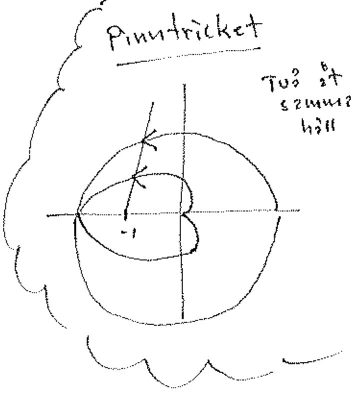
Så har G_c en pol på Im-axeln skär Nyquistkurvan -1 och det är inte meningsfullt att prata om omcirkulationer.

OBS: P_c kan ej vara negativ, så riktningen på omcirklingen är oviktig. Ta absolutbeloppet på det tal du får

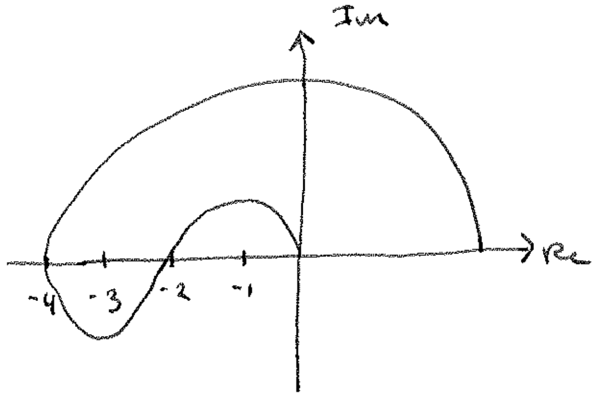
i, Omsluter ej -1 $\Rightarrow$ Stabilt

ii, Omsluter ej -1 $\Rightarrow$ Stabilt

iii, Omsluter -1 två gånger i samma riktning
$\Rightarrow$ G_c har två poler i HHP
$\Rightarrow$ Ostabilt

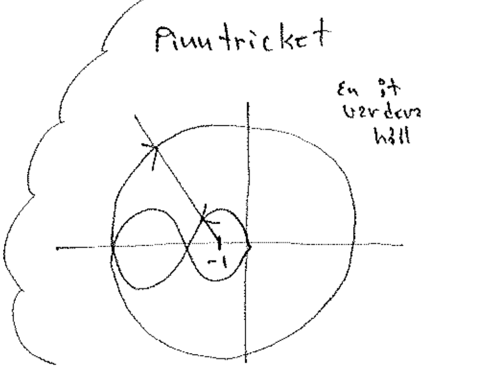


iv,



(Andra halvan är spegelbild)

Omsluter ej -1 $\Rightarrow$ Stabilt



b) Kurvan vi har uppritat är $KG(s)$ för alla s på  när $K = 1$.

Vad händer när vi ändrar K?

Ta en punkt z.

Den mappades till $1 \cdot G(z)$. ← via $1 \cdot G(z)$

Om vi istället mappar via $K \cdot G(z)$ hamnar den i $KG(z)$.

$\Longrightarrow$ Varje punkt på kurvan multipliceras med K, dvs. K är en ren skalning av kurvan.

Hur mycket kan vi skala varje kurva för att systemet fortfarande ska vara stabilt (dvs. inte omsluta -1)?

i) $K \cdot 0.4 = 1 \Longrightarrow K = \frac{1}{0.4} = \frac{1}{2/5} = \frac{5}{2} = 2.5$

dvs. kurvan kan skalas 2.5 gånger innan vi börjar omsluta -1 (två gånger).

$\Longrightarrow$ Stabil för $0 < K < 5/2$.

ii, $K \cdot 0 = 1 \Rightarrow$ Saknar lösning

(Hur mycket vi än skalar kurvan omsluts aldrig -1).

$\Longrightarrow$ Stabil för alla $K > 0$.

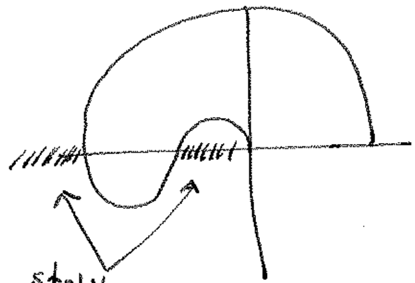
iii, $K \cdot 2 = 1 \Rightarrow K = 1/2$

dvs. förminskar vi kurvan till hälften eller mer blir den stabil

$\Longrightarrow$ Stabil för $0 < K < 1/2$.

iv, $K \cdot 2 = 1 \Rightarrow K = 1/2$

$K \cdot 4 = 1 \Rightarrow K = 1/4$

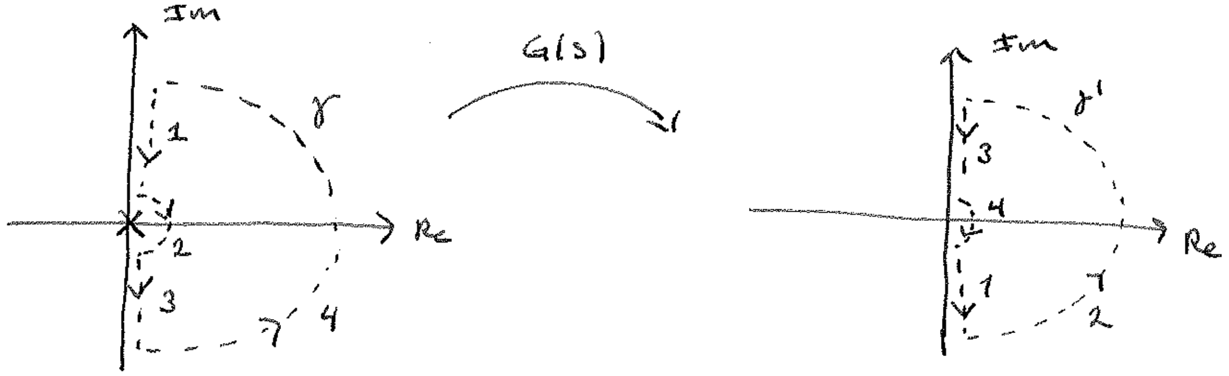


$\Longrightarrow$ Stabilt för

$K > 1/2$ och $0 < K < 1/4$.

Upg 3.16a

Rita Nyquistkurvan för $G(s) = 1/s$.



(Rita allteftersom)

Observera att öppna systemet har en pol i origo som vi måste exludera.

Del 1:

$s = i\omega$ för $\omega : \infty \longrightarrow 0$.

$$G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = \frac{i}{i \cdot i\omega} = -\frac{i}{\omega}$$

För $\omega \approx \infty$ är $G(i\omega)$ liten negativt imaginär.

För $\omega \approx 0$ är $G(i\omega)$ stor negativt imaginär.

$\Longrightarrow$ Börjar i origo och går ner på Im-axeln

Del 2:

$s = re^{i\theta}$ för $r \longrightarrow 0$ och $\theta : \pi/2 \longrightarrow -\pi/2$

$$G(re^{i\theta}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{\to \infty} \cdot \underbrace{e^{-i\theta}}_{\text{halvcirkel åt motsatt håll}}$$

$\Longrightarrow$ Stor cirkel som går i riktning ↻

Del 3

$s = i\omega$ för $\omega : 0^- \longrightarrow -\infty$.

$$G(i\omega) = -\frac{i}{\omega}$$

För $\omega \approx 0^-$ är $G(i\omega)$ stor positivt imaginär.
För $\omega \approx -\infty$ är $G(i\omega)$ liten positivt imaginär.

$\Longrightarrow$ Går ner från ∞ till 0 på Im-axeln.

Del 4

$s = Re^{i\theta}$ för $R \longrightarrow \infty$ och $\theta : -\pi/2 \longrightarrow \pi/2$

$$G(Re^{i\theta}) = \underbrace{\frac{1}{R}}_{\longrightarrow 0} \cdot \underbrace{e^{-i\theta}}_{\text{helucirkel åt motsatt håll}}$$

$\Longrightarrow$ liten cirkel som går i riktning $\swarrow$

— x —

Nu kan vi använda Nyquistkriteriet

$$\underbrace{P_c}_{\text{antal poler i HHP för slutna systemet}} = \underbrace{P_o}_{\text{poler i HHP för öppna systemet}} + \#\text{ omcirklingar av } -1 \text{ av } \gamma'$$

Men $G(s) = 1/s$ har noll poler i HHP och γ' omcirklar ej -1, så

$$P_c = 0 + 0 = 0$$

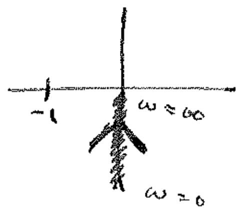
$\Longrightarrow$ Slutna systemet har inga poler i HHP

$\Rightarrow$ Slutna systemet är stabilt

Obs:

Nyquistkurvan är egentligen bara avbildningen av positiva Im-axeln från 0 till ∞.

För oss



Med förenklade Nyquistkriteriet (s. 78) kan vi direkt dra slutsats om stabilitet.

Upg 3.17

a, Vi har givet att $G(s)$ är stabil, så det öppna systemet

$$G_o(s) = F(s)G(s) = K\,G(s)$$

har inga poler i HHP.

Nyquistkurvan är ritad för $G(s)$. Ritas den för $KG(s)$ skalas alla punkter med en faktor K.

Förenklade Nyquistkriteriet (s. 78)

Om G_o inte har poler i HHP så är det slutna systemet stabilt precis då punkten -1 ligger till vänster om Nyquistkurvan (genomlöpt från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$).

Alltså vill vi hitta de K så att kurvan ligger helt till höger om -1:

$$K \cdot 1.5 = 1 \Rightarrow$$

$$K = 2/3$$

dvs. stabilt för $0 < K < 2/3$.

Alt:

$$P_c = \underbrace{P_o}_{=0} + \#\text{ omcirklingar av } -1.$$

Hur välja K för att # ska bli noll?

b, Statiska felet är skillnad mellan referens- och utsignal då $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \to \infty} e(t).$$

Slutvärdessatsen får bara användas om systemet är stabilt:

$\Rightarrow$ Välj $K < 2/3$ som garanterar att det slutna systemet är stabilt (från a)).

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to 0} sE(s)$$

Alt:

$\lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t)) =$

$1 - \lim_{t \to \infty} y(t) =$

$1 - \lim_{s \to 0} sY(s) =$

$1 - \lim_{s \to 0} s\,G_c(s) R(s)$

stabil

Vad är $E(s)$?

Gå i blockschemat:

$$E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s)\,K\,E(s)$$

Insättning och lös ut $E(s)$:

$$E(s) = Y_{ref}(s) - G(s) K E(s) \Rightarrow$$

$$E(s)\left[1 + G(s)K\right] = Y_{ref}(s) \Rightarrow$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)K}\, Y_{ref}(s)$$

Referensen är ett steg

$$Y_{ref}(s) = 1/s$$

så

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)K} \frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)K} = \frac{1}{1+2K}.$$

Varför är $G(0) = 2$?

Nyquistkurvan är plot av $G(i\omega)$,

kolla i figuren vad $G(i\cdot 0)$ är.

c) Hur påverkas Nyquistkurvan av I-delen?

Det nya öppna systemet är

$$G_0(s) = \frac{K}{s} \cdot G(s).$$

Kolla hur beloppet ändrar sig för punkter på Nyquistkurvan:

Vi mappar $s = i\omega$ för $\omega: 0 \to \infty$:

$$|G_0(i\omega)| = \left|\frac{K}{i\omega} G(i\omega)\right| = \frac{1}{|i\omega|} |K| \, |G(i\omega)| =$$

$$= \frac{1}{\omega} K \, |G(i\omega)|$$

dvs. alla punkter skalas med en faktor $\frac{K}{\omega}$.

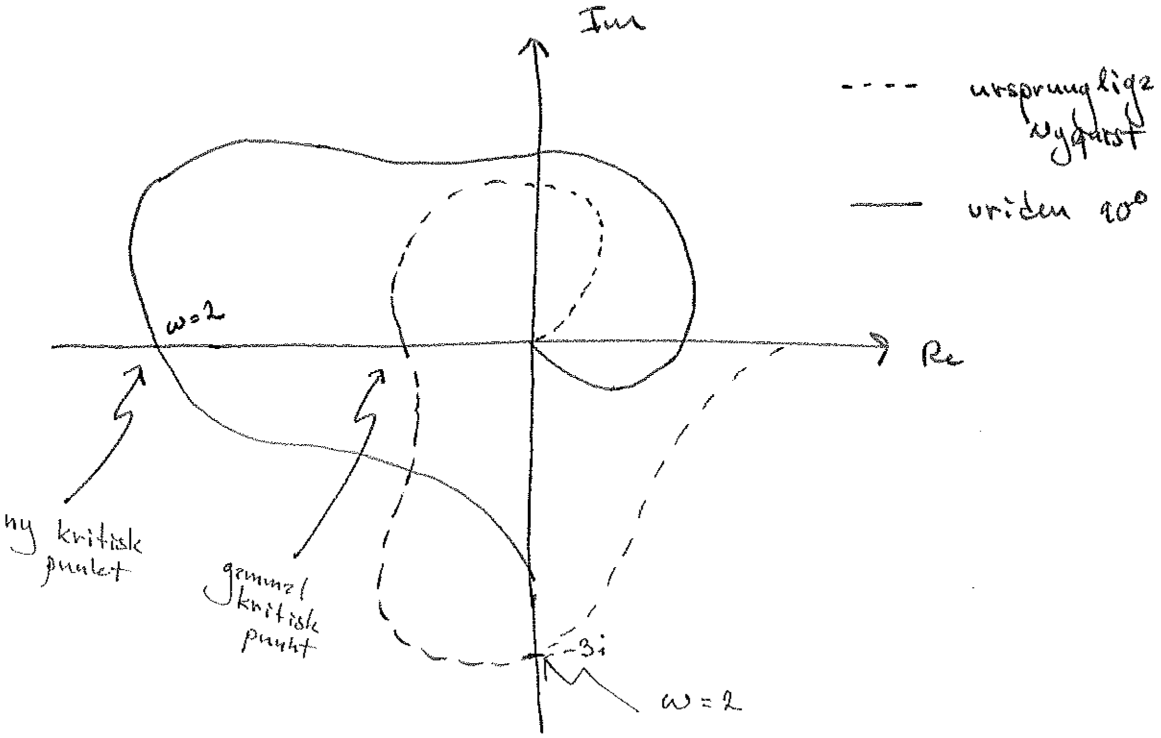
Kolla hur argumentet ändras:

$$\arg(G_0(i\omega)) = \arg\left(\frac{K}{i\omega} G(i\omega)\right) =$$

$$= \underbrace{\arg(K)}_{\substack{\text{pos. reellt} \\ \text{tal} \\ = 0}} - \underbrace{\arg(i\omega)}_{\substack{\text{positivt} \\ \text{imaginärt} \\ \text{tal} \\ = \pi/2}} + \underbrace{\arg(G(i\omega))}_{\substack{\text{kurvan vi} \\ \text{har i figuren}}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \arg(G(i\omega))$$

dvs. kurvan vrider sig ett fjärdedels varv medurs.



Den nya Nyquistkurvan skär negativa reella axeln vid $\omega = 2$. (dvs. där gamla kurvan skar negativa Im-axeln).

Notera att vi också får en skalning av kurvan! (Ej ritad i figuren)

Beloppet vid skärningen med Re-axeln måste vara mindre än 1 (så vi inte omsluter -1) för stabilitet!

$$1 > |G_0(i\omega)|\Big|_{\omega=2} = \left|\frac{K}{2i} G(i \cdot 2)\right| = \frac{K}{2} |G(i \cdot 2)|$$

$$= \frac{K}{2} |-3| = \frac{3K}{2}$$

från gamla kurvan

$\Rightarrow K < \frac{2}{3}$ garanterar stabilitet för slutna systemet.