Övning 6

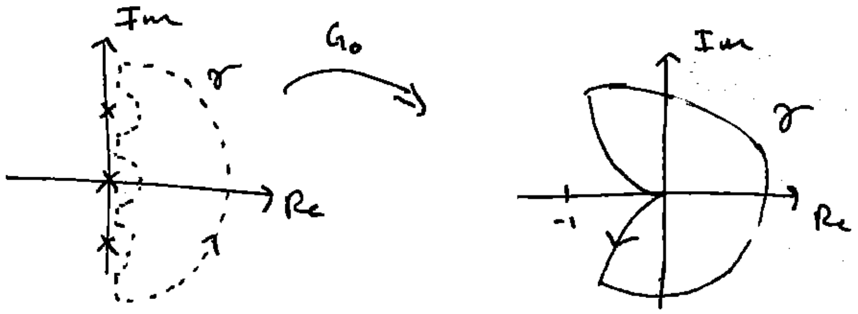
Robert Mattila

Förra gången

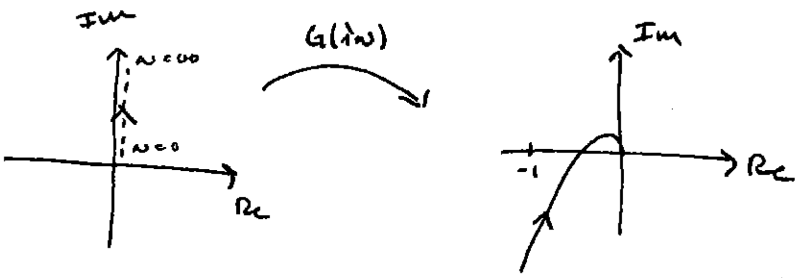
Nyquistkriteriet

$$\boxed{\underbrace{P_c}_{\substack{\#\text{ poler för}\\\text{slutna systemet}\\\text{i HHP}}} = \underbrace{P_o}_{\substack{\#\text{ poler för}\\\text{öppna systemet}\\\text{i HHP}}} + \#\text{ varv } \gamma' \text{ omsluter } -1}$$

där γ' ficks från att omsluta HHP med en kurva γ.



Nyquistkurvan var hur Im-axeln avbildas (från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$)



Förenklat Nyquistkriterie:

Om $G_o(s)$ ej har poler i HHP, så är det slutna systemet stabilt precis då -1 ligger till vänster om Nyquistkurvan.

Teori:

Superposition

För Linjära TidsInvarianta (LTI) system gäller

$$u_1 \longrightarrow \boxed{G} \xrightarrow{\;y_1\;} \qquad u_2 \longrightarrow \boxed{G} \xrightarrow{\;y_2\;}$$

$$au_1+bu_2 \longrightarrow \boxed{G} \xrightarrow{\;ay_1+by_2\;}$$

En allmän insignal kan skrivas som en summa eller integral över sin- och cos-termer (Fourier).

Frekvenssvar

För LTI $G(s)$, efter att transienter försvunnit, gäller att

- sin in $\longrightarrow$ sin ut
- $u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \xrightarrow{\;y(t)\;}$

$$u(t) = A\sin(\omega t)$$

$$y(t) = |G(i\omega)|\,A\sin(\omega t + \underbrace{\arg(G(i\omega))}_{=\varphi})$$

- Utsignalen är en sinus som är förstärkt $|G(i\omega)|$ och fasförskjuten $\varphi = \arg G(i\omega)$.
- $G(i\omega) = |G(i\omega)|\,e^{(\arg G(i\omega))i}$ kallas frekvenssvaret.

(– OBS: Denna är i princip Nyquistkurvan!)

Upg 4.11

Insignal $U(s)$ - badets temperatur
Utsignal $Y(s)$ - termometerns värde

Termometern kan beskrivas med ett 1:a ordningens system:

$$Y(s) = G(s)\,U(s) \Rightarrow$$
$$Y(s) = \frac{a}{s+b}\,U(s).$$

Vi vet att sin in ger sin ut, dvs.

$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

ger

$$y(t) = A\,|G(i\omega)|\,\sin(\omega t + \varphi)$$

där

$$\varphi = \arg G(i\omega).$$

Egentligen $u(t) = u_0 + A\sin(\omega t)$ men använd superposition

Bestäm $u(t)$ från figuren:

$$\text{Amplitud} = A = 32^\circ - 30^\circ = 2^\circ C$$

$$\text{Frekvens} = \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.314\ \text{min}} = \frac{2\pi}{0.314 \cdot 60\ \text{s}} \approx 0.33\ \text{Hz}$$

Bestäm $y(t)$ från figuren:

$$\text{Amplitud} = A|G(i\omega)| = 30.9^\circ - 30^\circ = 0.9^\circ C$$

$$\text{Fasförskjutning} = \varphi = \frac{2\pi}{T}\cdot\Delta t = \frac{2\pi}{0.314\ \text{min}}\cdot(-0.056\ \text{min}) \approx$$

den ligger 0.056 min efter insignalen

$$\approx -1.12\ \text{rad}$$

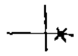
$$\Longrightarrow |G(i\omega)| = \frac{0.9^\circ C}{A} = \frac{0.9^\circ C}{2^\circ C} = 0.45$$

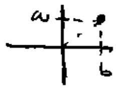
Bestäm nu a och b:

$$\varphi = \arg G(i\omega) = \arg \frac{a}{i\omega + b} = \arg a - \arg(i\omega + b) =$$

Annars om vi gör ett steg i badets temp. minskar termometerns temp. (Vi håller den upp-och-ned)

$= \Big\{$ Antag positiv statisk förstärkning $G(0) = a/b > 0$ och stabilt system (det är en termometer...), dvs. $b > 0 \Rightarrow a > 0$ $\Big\}$

$= \{$ $\arg a = \arg$  $= 0$

$\arg(i\omega + b) = \arg$  $= \arctan \frac{\omega}{b}$ $\}$

$\tan = \frac{\text{motstående}}{\text{närliggande}}$

$$= -\arctan \frac{\omega}{b}$$

Lös för b:

$$-\varphi = \arctan \omega/b \Rightarrow$$

$$\frac{\omega}{b} = \tan(-\varphi) \Rightarrow$$

$$b = -\frac{\omega}{\tan \varphi} = -\frac{0.33}{\tan(-1.12)} \approx 0.16$$

Och sedan beloppet av G:

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{a}{i\omega + b} \right| = \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$a = |G(i\omega)| \sqrt{\omega^2 + b^2} \approx 0.45 \sqrt{(0.33)^2 + (0.16)^2}$$

$$\approx 0.17$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{0.17}{s + 0.16}.$$

Teori 2

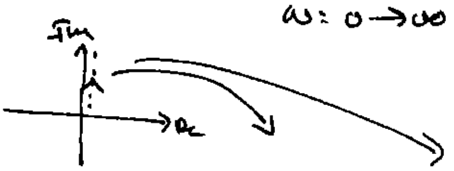
Bode diagram

Bodediagram består av två diagram

- $|G(i\omega)|$ – beloppskurva (oftast logaritmisk / dB)
- $\arg(G(i\omega))$ – faskurva

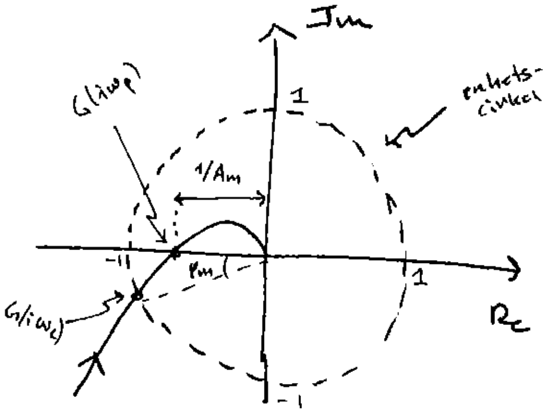
för $\omega: 0 \to \infty$.

Obs: Nyquistkurvan är plot av $G(i\omega)$ för $\omega: 0 \to \infty$. Samma sak!

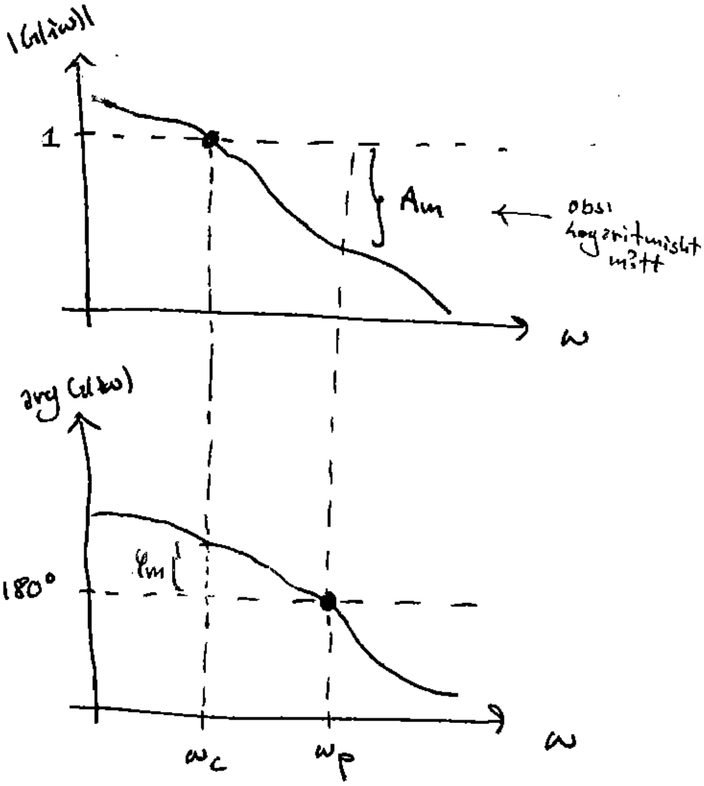


Figur s. 94-95

Nyquist

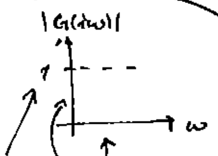


Bode



OBS: logaritmiskt avstånd mellan punkter på ω-axeln och $|G(i\omega)|$-axeln

OBS:



värdet på $|G(i\omega)|$ (absolut)

logaritmisk skala på axlarna

OBS: ω_c, φ_m bara väldefinierade vid en skärning med enhetscirkeln.
ω_p, A_m bara väldefinierade vid en skärning med negativa Re-axeln.
Annars: Rita hela Nyquist

Skissa Bodediagram (s. 87 – 88)

1, Faktorisera $G(s)$

$$G(s) = \frac{K(1+s/z_1)(1+s/z_2)\cdots(1+s/z_m)}{s^p(1+s/p_1)(1+s/p_2)\cdots(1+s/p_n)}$$

p = antal poler i origo (eventuellt noll)
m = antal nollställen
n = antal poler

2, Hitta lågfrekvensasymptoten — $G(i\omega)$ för små ω.
Identifiera hur $G(s)$ beter sig för små s

3, Hitta högfrekvensasymptoten
Identifiera hur $G(s)$ beter sig för stora s

4, Hitta brytpunkter
Punkterna där kurvan byter riktning.
Ges av $\omega = p_1, \ldots, p_n, z_1, \ldots, z_m$

5, Hitta lutningen
Lutningen ökas med 1 dekad/dekad för nollställen
Lutningen minskas ——— " ——— poler

6, Förankra
Bestäm värdet på någon frekvens (på lågnivåasymptoten)

7, Beräkna ett antal punkter på faskurvan
Beräkna $\arg G(i\omega)$ för några ω

8, Skissa Bodediagram

Bidrag från poler (brytpunkt)

$G(s) = \frac{1}{1+s/p_1}$. Vill rita $\log|G(i\omega)|$:

$$\log|G(i\omega)| = \log\frac{1}{|1+i\omega/p_1|} = \cancel{\log 1}^{\,0} - \log\sqrt{1+(\omega/p_1)^2}$$

För $\omega \gg p_1$: $\approx -\log \omega/p_1 = -\log\omega + \log p_1 \approx -\log\omega$

För $\omega \ll p_1$: $\approx -\log 1 = 0$ dvs. ändrar riktning vid $\omega \approx p_1$ med -1

Upg 4.2

a) Vill rita Bode för $G_o(s) = F(s)G_r(s)G_s(s)$.
Vad är $G_s(s)$?

Insignal δ (rodervinkel)
Utsignal ψ (båtvinkel)

Använd diff. ekvationerna

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \dot{\psi} \\ T_1\dot{\omega} &= -\omega + K_1\delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$T_1\ddot{\psi} = -\dot{\psi} + K_1\delta$$

Laplacetransformera

$$T_1 s^2 \Psi = -s\Psi + K_1\Delta$$

Lös ut utsignalen (Ψ):

$$\Psi(T_1 s^2 + s) = K_1\Delta \Rightarrow$$

$$\Psi(s) = \underbrace{\frac{K_1}{T_1 s^2 + s}}_{\substack{= G_s(s) \\ = \text{överför från } \Delta(s) \\ \text{till } \Psi\ (\psi).}} \Delta(s) = G_s(s)\Delta(s)$$

Så öppna systemet blir

$$G_o(s) = F(s)G_r(s)G_s(s) = K\frac{1+s/a}{1+s/b}\frac{1}{1+sT_2}\frac{K_1}{T_1 s^2 + s}$$

1, Skriv på "rätt" form

$$G_0(s) = K \frac{1+s/a}{1+s/b} \frac{1}{1+sT_2} \frac{K_1}{T_1 s^2 + s} =$$

$$= KK_1 \frac{1+s/a}{1+s/b} \frac{1}{1+\frac{s}{1/T_2}} \frac{1}{(T_1 s+1)s} =$$

$$= KK_1 \frac{1+s/a}{1+s/b} \frac{1}{1+\frac{s}{1/T_2}} \frac{1}{1+\frac{s}{1/T_1}} \frac{1}{s}$$

2, Lågfrekvensasymptot

$$\lim_{s\to 0} G_0(s) = \frac{KK_1}{s}$$

$$\Rightarrow \left|G_0(i\omega)\right|_{lf} = \left|\frac{KK_1}{i\omega}\right| = \frac{KK_1}{\omega}$$

lågfrekvens

$\Rightarrow$ Grafen lutar -1 i Bode för små ω

3, Högfrekvensasymptot

$$\lim_{s\to\infty} G_0(s) = \left\{ \lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{s}{a}\right) \approx \lim_{s\to\infty}\frac{s}{a} \right\} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} KK_1 \frac{s/a}{s/b} \cdot \frac{1}{\frac{s}{1/T_2}} \cdot \frac{1}{\frac{s}{1/T_1}} \frac{1}{s} =$$

$$= KK_1 \frac{s \cdot b \cdot \frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2}}{a \cdot s \cdot s \cdot s} = \frac{KK_1 b}{T_1 T_2 a} \frac{1}{s^3}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{|G_0(i\omega)|_{hf}}_{\text{högfrekvens}} = \left|\frac{KK_1 b}{T_1 T_2 a}\frac{1}{(i\omega)^3}\right| = \frac{KK_1 b}{T_1 T_2 a}\frac{1}{\omega^3}$$

$\Rightarrow$ Grafen lutar -3 i Bode för stora ω.

4,5) Hitta brytpunkter och lutning

Pol ger bidrag -1,
Nollställe ger bidrag $+1$

ω	0	$\frac{1}{T_1} = 0.01$	$a = 0.02$	$b = 0.05$	$1/T_2 = 0.1$	∞
Typ	lågfrekvens/pol	pol	nolla	pol	pol	högfrekvens
Bidrag	-1	-1	$+1$	-1	-1	
Total	-1	-2	-1	-2	-3	-3

Check: Är dom lika?

6, Förankra

Välj valfri ω mellan 0 och första nollskilda brytpunkten.

T.ex. $\omega = 0.005$:

$$|G_0(i\cdot 0.005)| = \left\{\begin{array}{l}\text{Använd uttrycket}\\ \text{för lågfrekvens-}\\ \text{asymptoten}\end{array}\right\} \approx |G_0(i\cdot 0.005)|_{lf} =$$

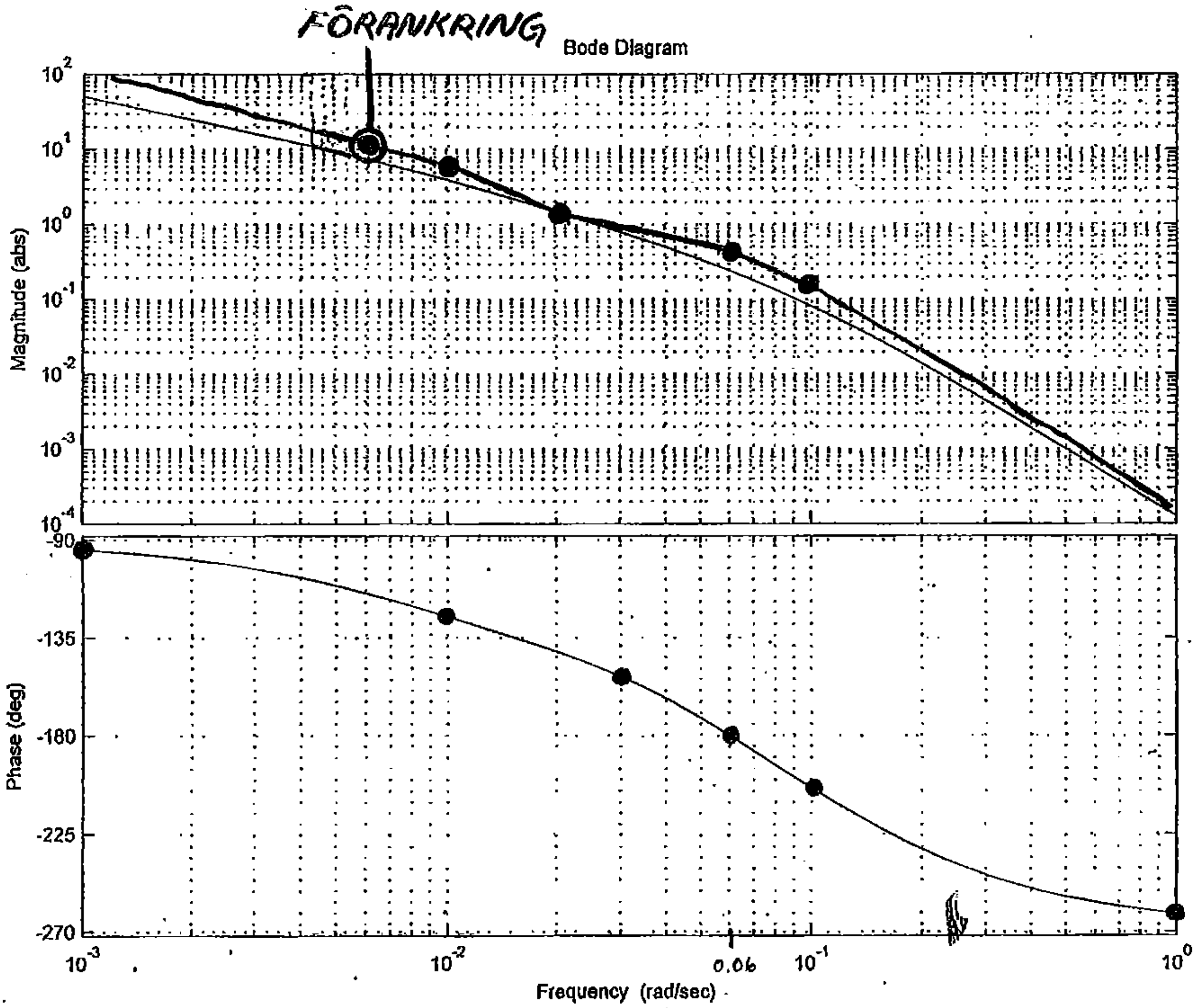
$$= \frac{KK_1}{0.005} = \frac{0.5\cdot 0.1}{0.005} = \frac{0.05}{0.005} = 10.$$

7, Beräkna några punkter på faskurvan

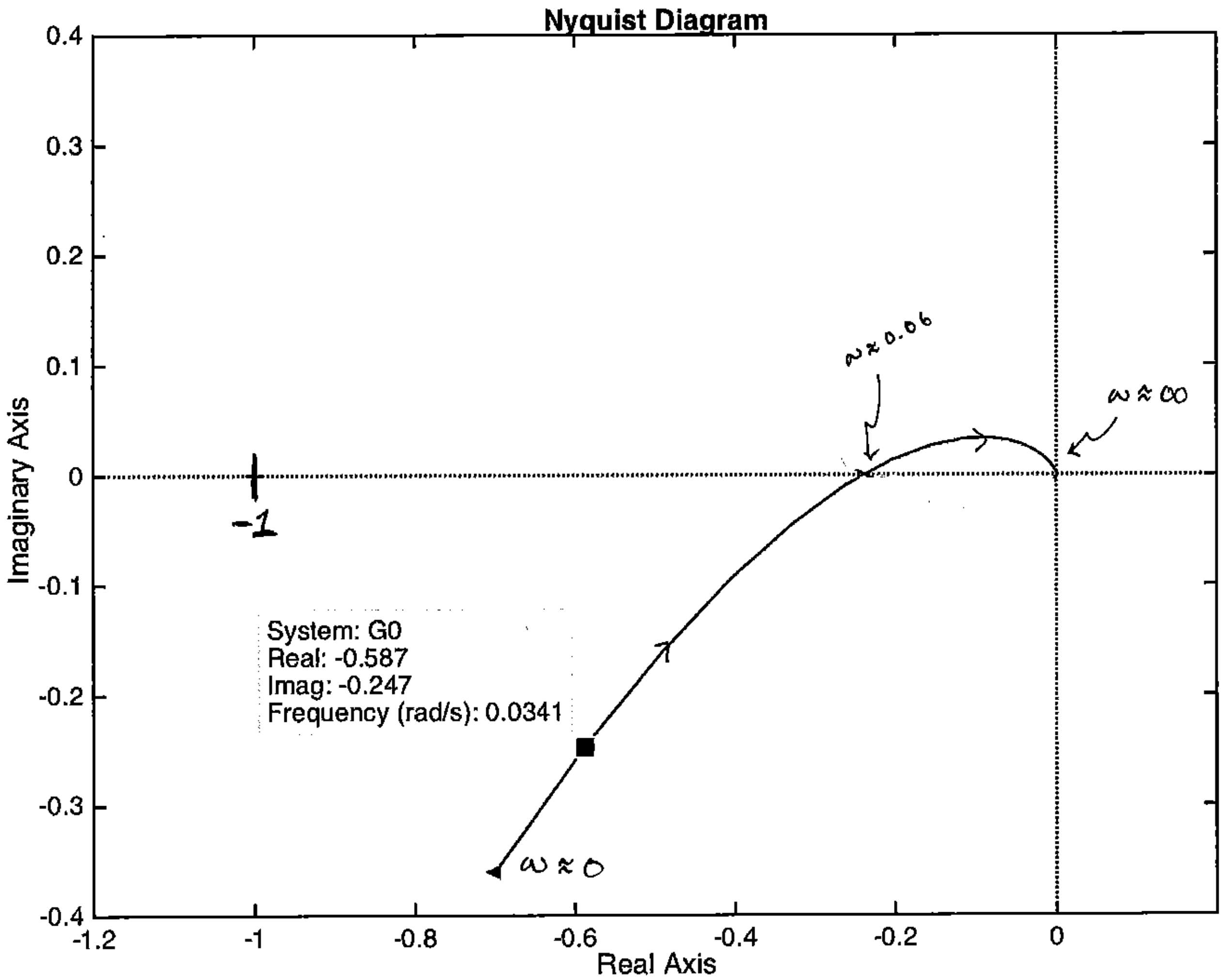
ω	0.001	0.01	0.02	0.05	0.1	1
$\arg G(i\omega)$	$-95°$	$-125°$	$-142°$	$-172°$	$-204°$	$-261°$

8, Rita Bode.

i, Sätt en prick på förstärkningspunkten
ii, Dra linje med lutning enligt lågfrekvensasymptoten
iii, Vid varje brytpunkt, korrigera lutningen på linjen
iv, Dubbelkolla att du på slutet har samma lutning som på högfrekvensasymptoten
v, Rita faskurvan genom att interpolera



FÖRANKRING
Bode Diagram
Magnitude (abs)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)
0.06


Nyquist Diagram
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
Imaginary Axis
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
Real Axis
-1
System: G0
Real: -0.587
Imag: -0.247
Frequency (rad/s): 0.0341
ω ≈ 0.06
ω ≈ ∞
ω ≈ 0

b, Hur påverkar K Bode ?

Vi vet att K svarar mot en ren skalning av Nyquistkurvan. Men Nyquistkurvan och Bode är olika representationer av samma sak!

$\Longrightarrow$ K förskjuter amplitudkurvan, men påverkar ej faskurvan!

När kan system självsvänga?

Vid $\omega = \omega_c$ om $\varphi_m = 0$ och $A_m = 1$ (se s. 96).

Dvs. för frekvensen Nyquistkurvan skär -1 (om den skär -1).

Vinkelfrekvenserna defineras av

ω_c: $\quad |G_0(\omega = \omega_c)| = |G_0(i\omega_c)| = 1$

ω_p: $\quad \arg G_0(\omega = \omega_p) = \arg G_0(i\omega_p) = -180°$

Självsvängning då $\omega_c = \omega_p$.

Från Bode:

$\omega_p = 0.06$ (där faskurvan skär $-180°$)

Vi vill välja K så att $\omega_c = 0.06$, dvs. $|G_0(\omega = 0.06)| = 1$.

Från Bode (amplitud):

$$|G_0(\omega=0.06)| = |\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vi har plottat} \\ \text{den för } K=0.5}}{0.5} \cdot G(\omega=0.06)| = 0.24 \implies$$

$$0.5\,|G(\omega=0.06)| = 0.24 \implies$$

$$|G(\omega=0.06)| = 0.48$$

Bestäm nu K:

$$1 = |G_0(\omega=0.06)| = |K\,G(\omega=0.06)| =$$

$$= K\,|G(\omega=0.06)| = K\cdot 0.48$$

$\implies K \approx 2.1$ ger självsvängningar

Perioden på dessa svängningar blir

$$T = \left.\frac{2\pi}{\omega}\right|_{\omega=\omega_c=\omega_p=0.06} = \frac{2\pi}{0.06} \approx 105 \text{ s.}$$

c)

Vi vet att

$$\psi_{ref} = A\sin\alpha t \longrightarrow \boxed{G_c(s)} \longrightarrow \psi = A|G_c(i\alpha)|\sin(\alpha t + \arg G_c(i\alpha))$$

så vi ser direkt att $\beta = \alpha$.

Vi vill nu bestämma $|G_c(i\alpha)|$ och $\arg G_c(i\alpha)$, dvs. $G_c(i\alpha)$.

Använd

$$G_c(i\alpha) = \frac{G_0(i\alpha)}{1 + G_0(i\alpha)}$$

och vår Bode-plot för $\omega = \alpha = 0.02$:

$$|G_0(i \cdot 0.02)| = 1.44$$

$$\arg G_0(i \cdot 0.02) = -142^\circ$$

dvs.

$$G_0(i \cdot 0.02) = |G_0(i \cdot 0.02)| e^{i \arg G_0(i \cdot 0.02)} =$$

$$= 1.44 \cdot e^{i \cdot (-142^\circ) \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} \approx \left\{ \begin{array}{l} \text{slå på} \\ \text{miniräknaren} \end{array} \right\}$$

$180^\circ = \pi$ rad

$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$ rad

$$\approx -1.135 - 0.887i.$$

Detta ger sedan att

$$B = A|G_c(i\alpha)| = 5\left|\frac{G_0(i\cdot 0.02)}{1+G_0(i\cdot 0.02)}\right| =$$

$$= 5\,\frac{|-1.135-0.887i|}{|1-1.135-0.887i|} = 5\,\frac{\sqrt{(1.135)^2+(0.887)^2}}{\sqrt{(0.135)^2+(0.887)^2}} \approx$$

$$\approx 8.03^\circ$$

samt

$$\varphi = \arg G_c(i\alpha) = \arg\frac{G_0(i\cdot 0.02)}{1+G_0(i\cdot 0.02)} =$$

$$= \arg G_0(i\cdot 0.02) - \arg[1+G_0(i\cdot 0.02)] =$$

$$= -142^\circ - \arg[1-1.135-0.887i] =$$

$$= -142^\circ - \arg[-0.135-0.887i] = \{\quad\}$$

$$= -142^\circ - \left[-90^\circ - \arctan\frac{0.135}{0.887}\right] \approx$$

$$\approx -43.3^\circ \approx -0.76 \text{ rad}$$

Upg 5.8 a

Öppna systemet är $G_0(s) = G_1(s)e^{-sT}$.

Vi har Bode för G_1; hur påverkar e^{-sT}?

- $|G_0(i\omega)| = |G_1(i\omega)e^{-i\omega T}| = |G_1(i\omega)|\underbrace{|e^{-i\omega T}|}_{=1} = |G_1(i\omega)|$

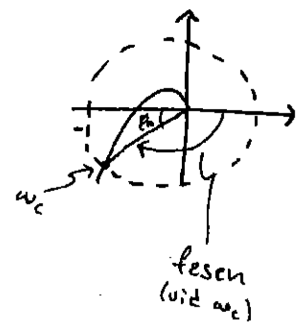
$\Longrightarrow$ Magnitudkurvan är oförändrad

- $\arg G_0(i\omega) = \arg G_1(i\omega)e^{-i\omega T} = \arg G_1(i\omega) + \arg e^{-i\omega T}$

$$= \arg[G_1(i\omega)] - \omega T$$

$\Longrightarrow$ Faskurvan sänks med ωT (vid frekvensen ω).

Från diagrammet avläser vi en fasmarginal φ_m på $40°$. Det betyder vi kan sänka fasen $40°$ (vid $\omega = \omega_c$) innan vi får instabilitet vid återkoppling.



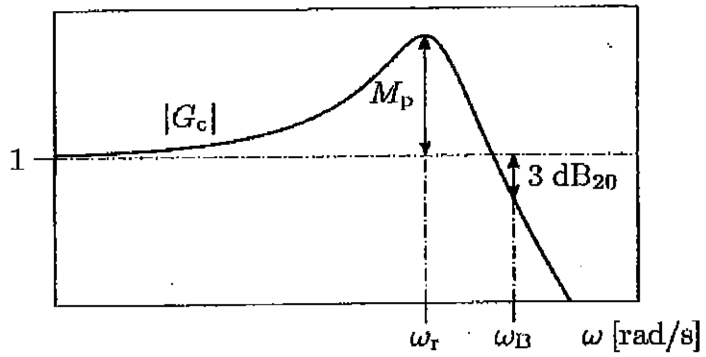
$$\Longrightarrow \underbrace{\omega T\Big|_{\omega=\omega_c}}_{\text{fassänkning}} < \varphi_m$$

$$\Longrightarrow T < \frac{\varphi_m}{\omega_c} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_m = 40° \approx 0.698 \text{ rad} \\ \omega_c = \{\text{figur}\} = 1 \text{ rad/s} \end{array} \right\} \approx 0.698 \text{ s}$$

garanterar stabilitet.

sida 98

Bode - Det slutna systemet



M_p Resonanstopp

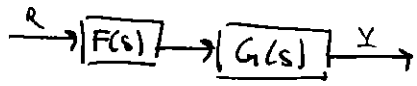
ω_r Resonansfrekvens

ω_B Bandbredd. $|G(i\omega_B)| = 1/\sqrt{2} = -3dB$ (alt. $|G(0)|/\sqrt{2}$ om $|G(0)| \neq 1$)

Tumregel:
$1/T_r \sim \omega_B$

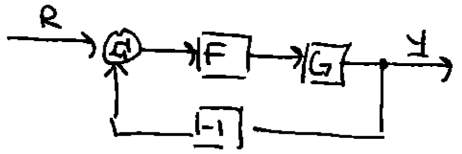
dvs. vad som händer (Y) om vi skickar in (R) en sinus för olika frekvenser

Observera skillnaden:
Tidigare har vi ritat Bode för öppna systemet G_o =



, ovan är Bode ritad för slutna systemet

G_c =



.

Upg 4.4

Bode nr. 3 har en statisk förstärkning

$$G_{c,3}(i\cdot 0) \neq 1,$$

closed

stegsvar B landar ej på 1 stationärt.

$$\Rightarrow \quad 3 \longleftrightarrow B$$

Motivering:

Stabila stegsvar $\Rightarrow$ Får använda slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s)R(s) = \left\{\begin{matrix}\text{steg}\\ R(s)=1/s\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{s\to 0} G_c(s) = G_c(0).$$

Dvs. enhetssteget landar på $|G_c(0)|$.

Obs.

$$1 = 1\cdot\cos(0t) \longrightarrow \boxed{G_c(s)} \longrightarrow |G_c(0)|\cos(0t + \underbrace{\arg G_c(0)}_{=0}) = |G_c(0)|$$

Eftersom $G_c(0)$ är reell (reella koefficienter i polynomen).

(positiv statisk förstärkning antas.)

Bode 2 och 4 har (lika) höga resonans-toppar. Bode 2 har högst resonansfrekvens.

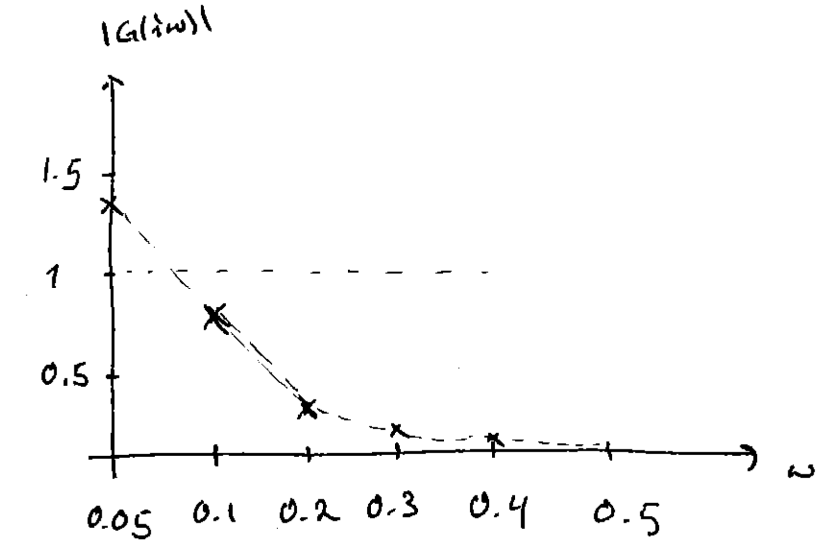
$$\Rightarrow \quad 2 \longleftrightarrow A$$
$$4 \longleftrightarrow C$$

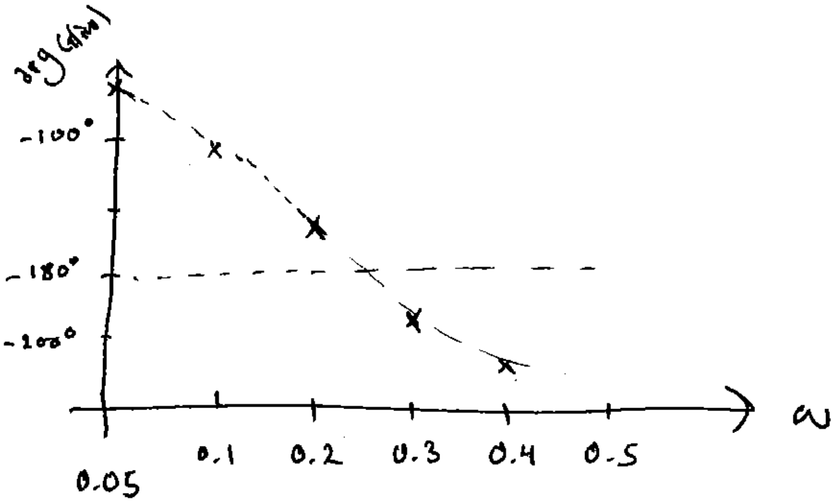
Bode 1 har en liten resonanstopp.
Stegsvar D har små oscillationer.

$$\Rightarrow \quad 1 \longleftrightarrow D.$$

5.2

a,





b, P-regulator rör inte faskurvan, men skjuter magnitudkurvan upp/ner ($G_o(s) = K G(s)$). ← Så vi kan lägga skärfrekvensen precis där vi vill.

Fasmarginal $\varphi_m \geq 50^\circ$, dvs. vi vill lägga ω_c ($|G(i\omega_c)| = 1$) där faskurvan skär -130°.

Detta ser vi sker ungefär då $\omega \approx 0.15$ rad/s.

Vi kan lösa ut den nödvändiga förstärkningen som

$$1 = |G_o(i \cdot 0.15)| = |K G(i \cdot 0.15)| = K \cdot |G(i \cdot 0.15)| \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{|G(i \cdot 0.15)|} \approx \frac{1}{0.53} \approx 1.9.$$