Övning 8

Robert Mattila

Repetition

Frekvenssvar

- Funktionen $G(i\omega)$ som en funktion av reella $\omega \geq 0$, kallas frekvenssvaret.

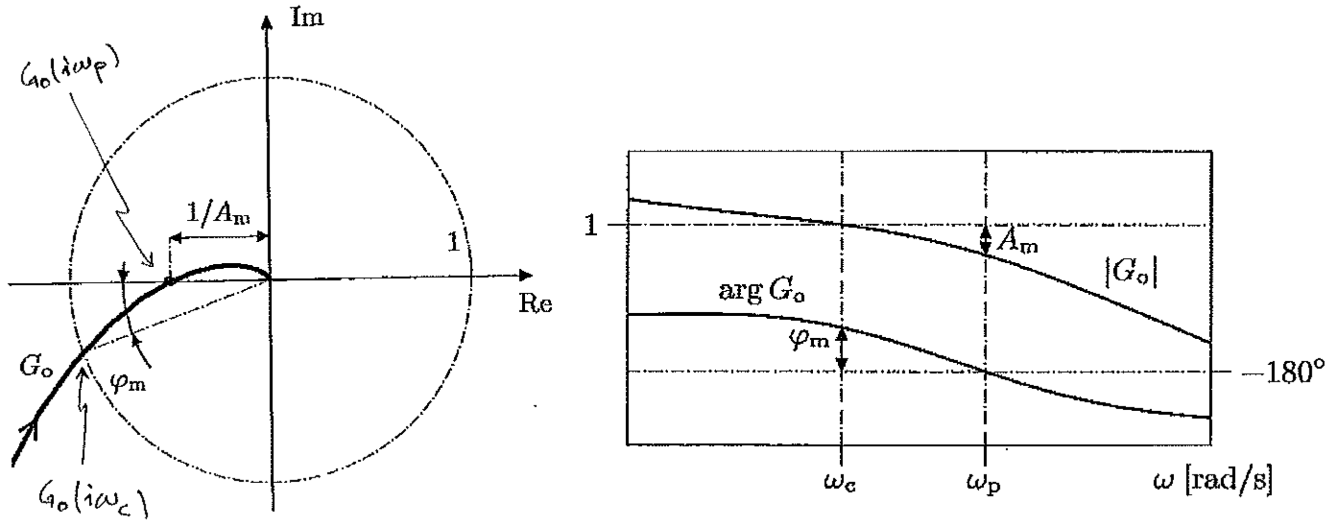
$$u(t) = A\sin(\omega t) \Rightarrow y(t) = |G(i\omega)|A\sin(\omega t + \phi)$$

där

$$\phi = \arg(G(i\omega))$$

Bodediagram (s. 94-95)

Bodediagrammet är $G(i\omega)$ med $|G(i\omega)|$ och $\arg(G(i\omega))$ plottat var för sig:



ω_c Skärfrekvens. $|G(i\omega_c)| = 1$

φ_m Fasmarginal. $\varphi_m = \arg(G(i\omega_c)) - (-180°)$

ω_p Fasskärfrekvens. $\arg(G(i\omega_p)) = -180°$

A_m Amplitudmarginal. $A_m = 1/|G(i\omega_p)|$

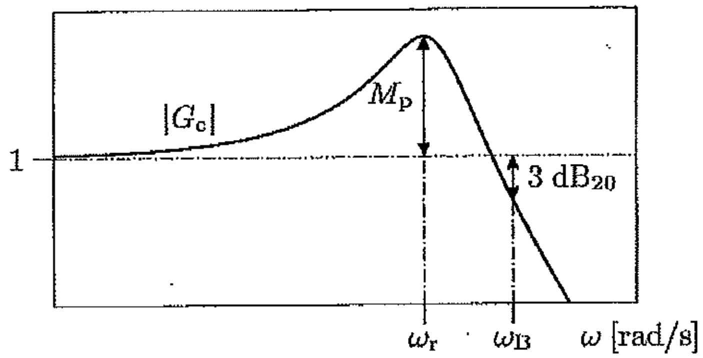
En allmän referens r(t) kan skrivas som summa av sin och cos. Kom ihåg: sin in → sin ut. Amplitudkurvan i Bode för $G_c(s)$ ger info om hur bra varje ingående frekvens kan följas.

Bode - Det slutna systemet (s. 98)

M_p Resonanstopp

ω_r Resonansfrekvens

ω_B Bandbredd. $|G(i\omega_B)| = 1/\sqrt{2} = -3dB$



Tr = rise time
ζ = relativ dämpning

Tumregler:

(s. 99) • $\omega_B \sim \frac{1}{T_r}$ (stor $\omega_B \rightarrow$ snabbt system)

(s. 99) • $M_p \sim \frac{1}{\zeta}$ (stor $M_p \rightarrow$ dåligt dämpat system)

(s. 99-100) • $\omega_c \sim \frac{1}{T_r}$ (stor $\omega_c \rightarrow$ snabbt system)

(s. 103) • $\varphi_m \sim \zeta$ (bra fasmarginal → bra dämpat system)

Teori

Lead-lag kompensering

Regulatorn

$$F(s) = F_{lead}(s)\, F_{lag}(s)$$

består av två delar (länkar):

- Fasavancerande länk:

$$F_{lead}(s) = K \cdot \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

lägger öppna systemets skärfrekvens på en önskad frekvens $\omega_{c,D}$ och öker fasen där

$\Rightarrow$ Bättre dämpat system

- Fasretarderande länk

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

öker förstärkningen vid låga frekvenser

$\Rightarrow$ Minskar stationärt fel

Lead-lag algoritm

A. Designa lead-länken

$$F_{lead}(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

1, Bestäm önskad skärfrekvens $\omega_{c,D}$ (desired) och fasmarginal φ_m genom t.ex. krav på stigtid och översläng.

2, Välj β för att höja fasen så önskad fasmarginal fås (figur 5.13 i boken eller lös ekvation (5.4) för β).

Höj fasen 5.7° extra för varje lag-länk.

3, Välj τ_D så maximal fasökning fås vid $\omega_{c,D}$:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,D}\sqrt{\beta}}.$$

4, Välj slutligen K så att $\omega_c = \omega_{c,D}$:

$$|G_o(i\omega_{c,D})| = 1 \implies$$

$$|F_{lead}(i\omega_{c,D})\, G(i\omega_{c,D})| = 1 \implies$$

$$|K| \left| \frac{\tau_D i\omega_{c,D} + 1}{\beta \tau_D i\omega_{c,D} + 1} \right| |G(i\omega_{c,D})| = 1 \implies \left\{ \tau_D = \frac{1}{\omega_{c,D}\sqrt{\beta}} \right\}$$

$$K = \frac{1}{|G(i\omega_{c,D})|} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}} i + 1}{\sqrt{\beta}\, i + 1} \right|} = \frac{1}{|G(i\omega_{c,D})|} \sqrt{\frac{\beta + 1}{1/\beta + 1}} =$$

$$= \frac{1}{|G(i\omega_{c,D})|} \sqrt{\beta \frac{\beta + 1}{1 + \beta}} = \frac{1}{|G(i\omega_{c,D})|} \sqrt{\beta} \implies$$

$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_{c,D})|}$$

B. Designa lag-länken

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

1, Välj γ så att det statiska felet blir tillräckligt litet. Använd slutvärdessatsen.

OBS! Statiskt fel för det återkopplade (i.e. slutna) systemet

2, Välj

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,D}}.$$

C. Verifiera

1, Rita Bode för öppna systemet

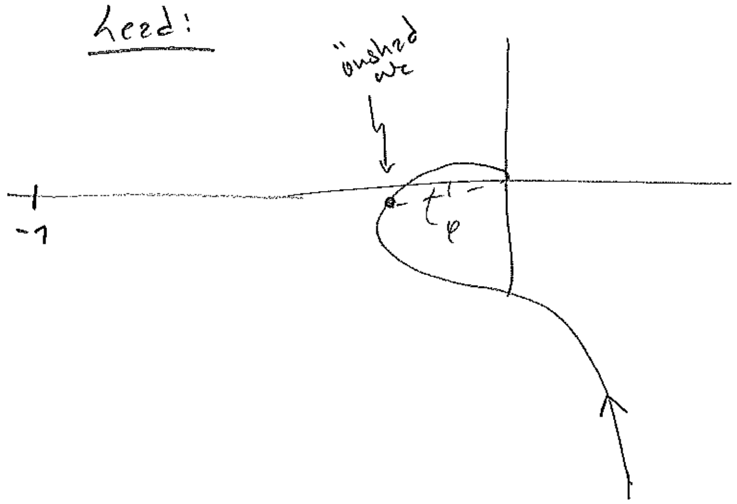
$$G_o(s) = F_{lead}(s)\, F_{lag}(s)\, G(s)$$

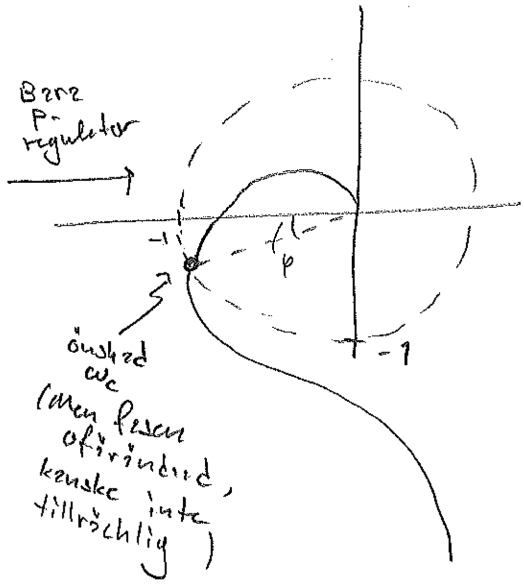
och kolla att specifikationer på skärfrekvens, fasmarginal etc. är uppfyllda

2, Gör stegsvar eller liknande för att verifiera specifikationer på stigtid, översläng etc.

Parentes:

Lead:

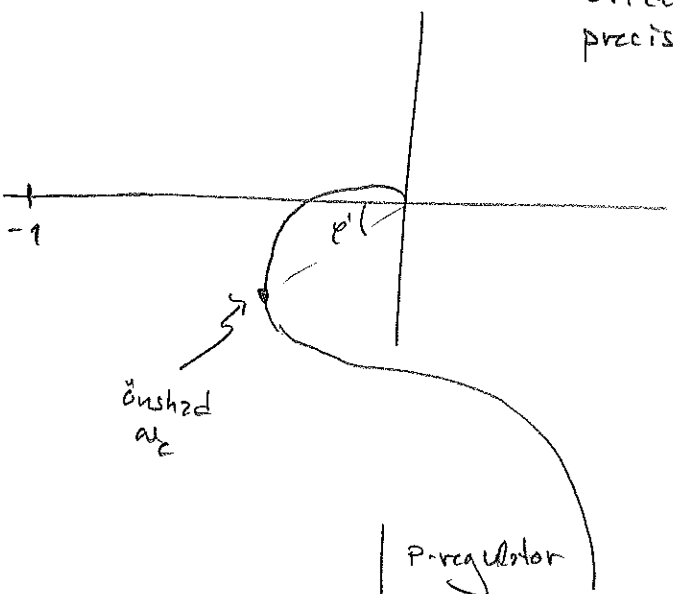




Fasökande $\dfrac{\tau_D s+1}{\beta \tau_D s+1}$

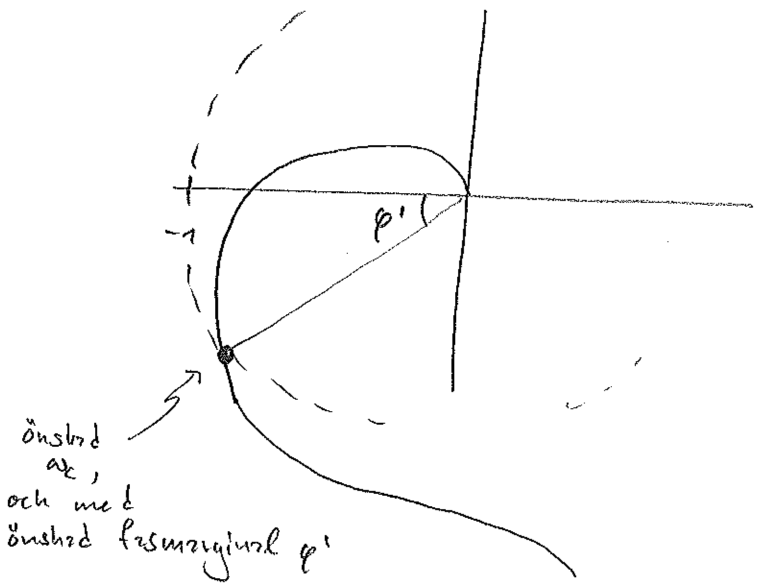
Vrider kurvan (som mest precis vid ω_c).

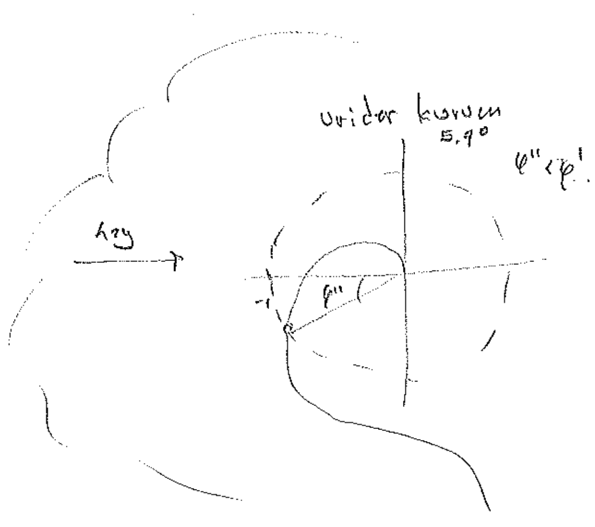
φ' högre än φ.



P-regulator

skalar kurvan så vi får önskad ω_c





Upg 5.10

Krav: i, $\varphi_m \approx 40°$

ii, Sluta systemet dubbelt så snabbt som med P-regulator

iii, Rampfelet 1% av vad som fås med bara P-regulator

a, Hur bra kan vi reglera med bara P-del?

Vill ha fasmarginal 40°:

$$\arg(G_0(i\omega_{c,K})) - (-180°) = 40° \Rightarrow$$

$$\arg(G_0(i\omega_{c,K})) = -140° \Rightarrow \left\{ G_0(s) = K\, G_1(s) \frac{1}{s} \right\}$$

$$\arg\left(K\, G_1(i\omega_{c,K}) \frac{1}{i\omega_{c,K}}\right) = -140° \Rightarrow$$

$$\underbrace{\arg K}_{=0} + \arg G_1(i\omega_{c,K}) - \underbrace{\arg(i\omega_{c,K})}_{=90°} = -140° \Rightarrow$$

$$\arg G_1(i\omega_{c,K}) = -50° \Rightarrow \{\text{Bode diagramet}\}$$

$$\omega_{c,K} = 0.5 \text{ rad/s}$$

Det K som ger denna fasmarginal och skärfrekvens är:

$$1 = |K G(i\omega_{c,K})| = K \left| \frac{1}{i\omega_{c,K}} G_1(i\omega_{c,K}) \right| \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\omega_{c,K}} |G_1(i\omega_{c,K})|} = \{\text{Bode}\} = \frac{1}{\frac{1}{0.5} \cdot 0.12} \approx 4.2$$

Dvs. med P-regulator med $K = 4.2$ får vi en fasmarginal på $40°$ och en skärfrekvens på $0.5 \frac{rad}{s}$.

b, Vår lead-lag regulator ska vara dubbelt så snabb som för P-regulatorn:

Ⓐ 1.

- Då $T_r \sim \frac{1}{\omega_c}$ vill vi nu ha

$$\omega_{c,D} = 2 \cdot \omega_{c,K} = 2 \cdot 0.5 \text{ rad/s} = 1 \text{ rad/s}.$$

- Vi vill ha $\varphi_m = 40°$, hur mycket ska vi höja fasen?

Fasen nu är

$$\arg G(i\omega_{c,D}) = \arg G_1(i\omega_{c,D}) \frac{1}{i\omega_{c,D}} =$$

$$\arg G_1(i\omega_{c,D}) - \underbrace{\arg i\omega_{c,D}}_{=90°} = \{\text{Bode}\} =$$

$$-105° - 90° = -195°$$

dvs. nuvarande fasmarginal är

$$\varphi_m = -195° - (-180°) = -15°$$

$\Rightarrow$ Måste höja fasen med $40° - (-15°) = 56°$ för att nå önskad fasmarginal.

$\Rightarrow$ Vi kommer ha en laglänk, så förkompensera med extra $5.7°$, dvs. höj med $55° + 5.7° = 60.7°$.

2\. Figur 5.13: boken ger oss önskad β. För så små β ökar dock bruskänsligheten (se figur 5.14).

Vi tar oss runt detta mha. två leadlänkar som vardera höjer fasen $\frac{60.7^\circ}{2} = 30.35^\circ$.

Figur 5.13 ger β för varje länk!

$$\beta \approx 0.325.$$

3\. Välj τ_d enligt regel

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,D}\sqrt{\beta}} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{0.325}} \approx 1.75$$

4\. Välj K så ω_c hamnar på $\omega_{c,D}$:

$$1 = |G_0(i\omega_{c,D})| = |F_{lead}^2(i\omega_{c,D}) G(i\omega_{c,D})| =$$

$$= \left| K^2 \left(\frac{\tau_D i\omega_{c,D} + 1}{\beta \tau_D i\omega_{c,D} + 1} \right)^2 G_1(i\omega_{c,D}) \frac{1}{i\omega_{c,D}} \right| = \left\{ \tau_D = \frac{1}{\omega_{c,D}\sqrt{\beta}} \right\} =$$

$$= K^2 \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{\beta}} i + 1}{\sqrt{\beta}\, i + 1} \right|^2 |G_1(i\omega_{c,D})| \frac{1}{\omega_{c,D}} =$$

$$= K^2 \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta} + 1}{\beta + 1}}^{\,2} |G_1(i\omega_{c,D})| \frac{1}{\omega_{c,D}} =$$

$$= K^2 \sqrt{\frac{1+\beta}{\beta+1} \frac{1}{\beta}}^{\,2} |G_1(i\omega_{c,D})| \frac{1}{\omega_{c,D}} =$$

$$= K^2 \frac{1}{\beta} |G_1(i\omega_{c,D})| \frac{1}{\omega_{c,D}} \Rightarrow$$

$$K^2 = \frac{\beta \cdot \omega_{c,D}}{|G_1(i\omega_{c,D})|} \Rightarrow$$

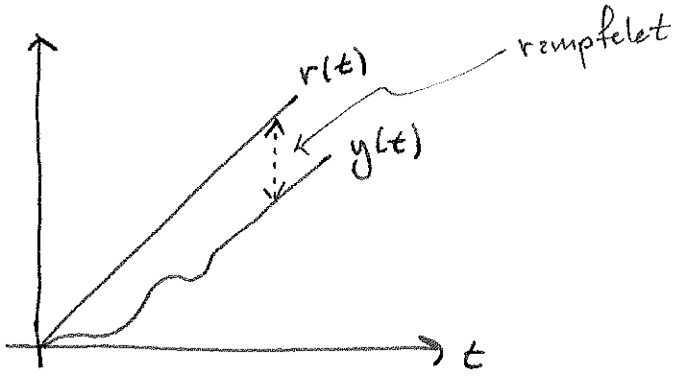
$$K = \sqrt{\frac{\beta \cdot \omega_{c,D}}{|G_1(i\omega_{c,D})|}} = \{\text{Bode}\} = \sqrt{\frac{0.325 \cdot 1}{0.025}} \approx 3.6$$

$\Rightarrow$ Vårje lead-länk är

$$F_{lead}(s) = 3.6 \, \frac{1.75 s + 1}{0.325 \cdot 1.75 s + 1} .$$

B lag-länk.

1. Vad är rampfelet?



$R(s) = \frac{1}{s^2}$ $\qquad r(t) = t.$

Söker

$$\lim_{t\to\infty} (r(t)-y(t)) = \lim_{t\to\infty} e(t).$$

Vad är $E(s)$?

$$E = R - Y = R - GFE \Rightarrow$$

$$E(1+GF) = R \Rightarrow$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{=G_e(s)} R$$

Vi ser att $G_e(s)$ har samma poler som det slutna systemet $G_c(s) = \dfrac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}$.

Med fasmarginal 40° är G_c stabil, så vi får använda slutvärdessatsen:

$$\text{rampfel} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) =$$

$R = 1/s^2$ (ramp)

$$= \lim_{s\to 0} s\, G_e(s) \frac{1}{s^2} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)F(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_1(s)\frac{1}{s}F(s)} \frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + G_1(s)F(s)}$$

För P-regulatorn (med $K = 4.2$) fås felet

$$\lim_{t\to\infty} e_k(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + KG_1(s)} = \frac{1}{KG_1(0)} = \{\text{Bode}\} =$$

$$= \frac{1}{4.2 \cdot 0.03} \approx 7.9$$

Med lead-lag skulle vi ha 1% av detta fel, dvs.

$$\frac{7.9}{100} = \lim_{t\to\infty} e_{ll}(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + G_1(s)\, F_{lead}^2(s)\, F_{lag}(s)} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + G_1(s)\left[K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}\right]^2\left[\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}\right]} =$$

$$= \frac{1}{G_1(0)\, K^2\, \frac{1}{\gamma}} \Longrightarrow$$

$$\gamma = \frac{7.9}{100} \cdot G_1(0)\, K^2 = \frac{7.9}{100} \cdot 0.03 \cdot (3.6)^2 \approx$$

$$\approx 0.031$$

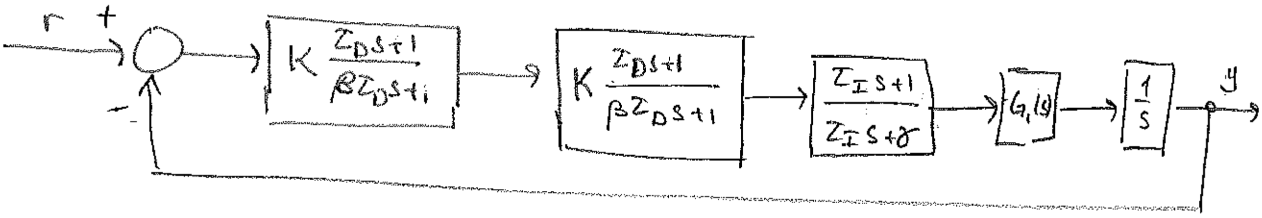
2, Välj τ_I enligt formel

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,D}} = \frac{10}{1} = 10.$$

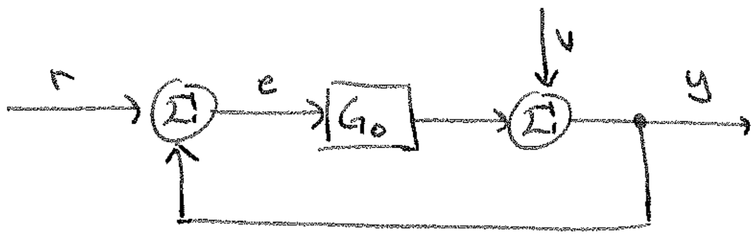
Slutligen fås

$$F(s) = \left[K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \right]^2 \left[\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} \right] =$$

$$= \left[3.6 \frac{1.75 s + 1}{0.325 \cdot 1.75 s + 1} \right]^2 \left[\frac{10 s + 1}{10 s + 0.031} \right].$$



Upg 6.3



Vi vet att sinus in ger sinus ut.
Tag fram överföringsfunktionen från v till y
och se om vi får förstärkning/förminskning,
dvs.

$$v(t) = A\sin(\omega t) \qquad \longleftarrow \quad \text{störning}$$

$$y(t) = A\underbrace{|G_s(i\omega)|}_{\geq 1\ ?}\sin(\omega t + \arg G_s(i\omega)). \qquad \longleftarrow \quad \text{utsignal}$$

Från blockschemat:

$$Y = V + G_0 E = V + G_0(R - Y) \Rightarrow$$

$$Y(1 + G_0) = V + G_0 R \Rightarrow$$

$$Y = \underbrace{\frac{1}{1+G_0}}_{G_s} V + \frac{G_0}{1+G_0} R$$

De störningar som förstärks är de frekvenser
som uppfyller

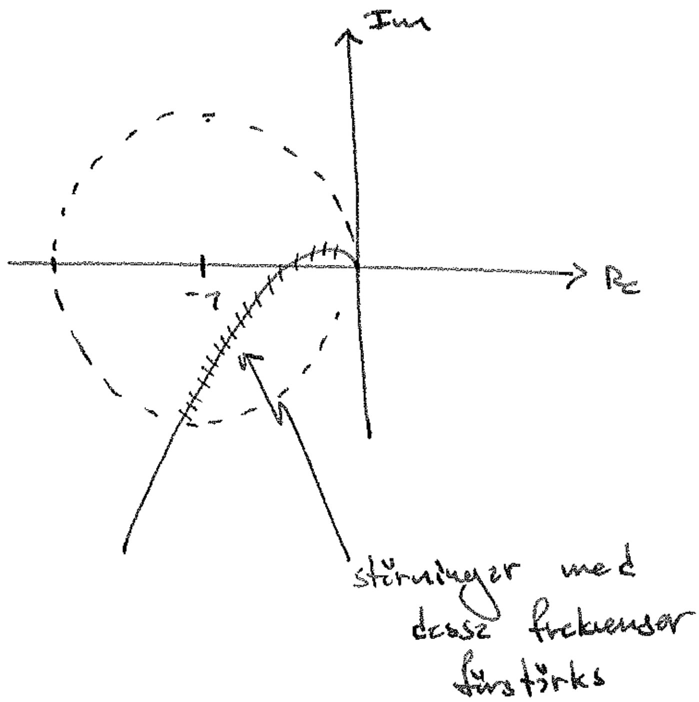
$$|G_s(i\omega)| \geq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|1 + G_0(i\omega)|} \geq 1 \Longrightarrow$$

$$1 \geq |1 + G_o(i\omega)| \Rightarrow$$

$$|G_o(i\omega) - (-1)|^2 \leq 1$$

Dvs. de ω så att Nyquistkurvan ligger inom en cirkel med radie 1 runt punkten −1.



OBS: $G_s(s)$ kallas känslighetsfunktionen och betecknas med $S(s)$ i boken, se s. 59-61 i boken.

Upg 6.1

I förra uppgiften tog vi fram överförings-funktionen från störning v till utsignal y, dvs. känslighetsfunktionen:

$$G_s(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{1}{1+K\frac{1}{s(s+1)}} =$$

$$= \frac{s(s+1)}{s(s+1)+K} = \frac{s^2+s}{s^2+s+K}$$

Kravet för att en störning ska undertryckas var att $|G_s(i\omega)| < 1$ vid den frekvensen.
Vi har en sinus-störning med $\omega = 1 \ \frac{rad}{s}$, så

$$1 > |G_s(i\cdot 1)| = \left|\frac{i^2+i}{i^2+i+K}\right| = \frac{|i-1|}{|i+K-1|} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+(K-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(K-1)^2}} \Rightarrow$$

$$1+(K-1)^2 > 2 \Rightarrow$$

$$(K-1)^2 > 1$$

Två fall:

$$K-1 > 1 \ : \ \Rightarrow \ K > 2$$
$$K-1 < -1 \ : \ \Rightarrow \ K < 0 \quad \text{(ej lösning)}$$

Svar: Störningar med frekvens $\omega = 1$ rad/s undertrycks om $K > 2$.