Övning 1

ROBERT MATTILA
RMATTILA@KTH.SE

Reglerteknik handlar om att analysera och styra $\underbrace{\text{dynamiska}}_{\text{tidsberoende}}$ system.

signaler / beteckningar:

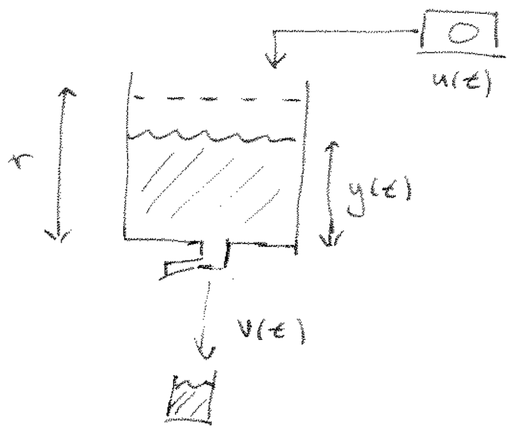
$y(t)$ – utsignal; det vi vill styra (och oftast kan mäta)

$r(t)$ – referenssignal; det önskade värdet på $y(t)$

$u(t)$ – styrsignal; det vi kan styra/påverka systemet med

$v(t)$ – störsignal; det vi inte kan styra (men som påverkar systemet).

Ex (kab):



$u(t)$ – hur mycket vatten vi pumpar in i tanken

r – fix vattennivå vi vill upprätthålla

$y(t)$ – nuvarande vattennivå

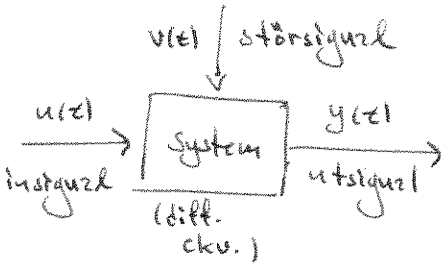
$v(t)$ – utströmmande vattenmängd (fkn av tid!), t.ex. någon fyller sitt glas.

System kan oftast beskrivas väl m.h.a. (linjära) diff. ekv., t.ex.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + u(t). \qquad (1)$$

OBS: $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$

Blockdiagram används för representera (sammankopplingar av) dynamiska system.



$\longrightarrow$: Representerar signal. Riktningen anger vad signalen påverkar.

$\square$: Representerar system (diff. ekv.).

- Inkommande pilar påverkar systemet (dvs. är <u>insignaler</u>)
- Utgående pilar är <u>utsignaler</u>

Diff. ekv. kan vara krångliga att jobba med.
Vid Laplacetransformering överförs derivator till multiplikationer, så vi får algebraiska problem istället för differentiella!

Definition:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}\,dt.$$

<u>Exempel:</u>

Antag att systemet beskrivet av (1) är i vila vid $t=0$.

$$\frac{dy}{dt}(t) = ay(t) + u(t) \qquad (1)$$

Laplacetransformering ger

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}(t)\right\}(s) = sY(s) = aY(s) + U(s).$$

Löser man ut $Y(s)$ här får man <u>överföringsfunktionen</u> från U till Y:

$$sY - aY = U \iff$$

$$Y(s-a) = U \iff$$

$$Y = \underbrace{\frac{1}{s-a}}_{:= G(s)} U = G(s)\, U .$$

$$\text{SIGNAL}_1 = G(s) \cdot \text{SIGNAL}_2$$

<u>Poler</u>: Ett systems poler är de s för vilka nämnaren i $G(s)$ är noll.

<u>Exempel:</u>

Ovan är $G(s) = \frac{1}{s-a}$, så systemet har en pol: a.

I allmänhet är $G(s)$ på formen

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{täljare} \\ \longleftarrow \text{nämnare} \end{array}$$

och polerna ges som lösningar till

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

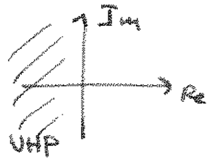
Polerna är viktiga för att kunna dra slutsatser om ett systems stabilitet (och beteende).

<u>Stabilitet:</u>

Ett system är insignal-utsignal (BIBO) stabilt om för varje begränsad insignal (i.e. $|u(t)| < \infty$) så är utsignalen också begränsad (i.e. $|y(t)| < \infty$).

"Systemet ska inte kunna explodera om vi inte skickar in en explotion"

Sats: (2.2) i boken. Ett system $G(s)$ är insignal-utsignal stabilt omm (om och endast om) alla poler till $G(s)$ ligger strikt i VHP (vänster halvplan).



Exempel:

Systemet $G(s) = \frac{1}{s-a}$ har en pol i a.

Vi kan lösa problemet i tidsdomänen direkt!

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s-a}U(s) \Rightarrow$$

← kan ej sätta $u=0$ redan här. tappar lösning.

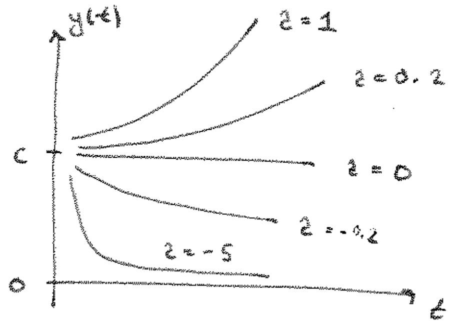
$$sY - aY = U$$

Antag att vi ej påverkar systemet $(U=0)$:

$$sY - aY = 0 \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow}$$

$$\dot{y} - ay = 0 \Longrightarrow$$

$$y(t) = Ce^{at}.$$



Poler svarar i princip mot argument hos exponentialfunktioner.

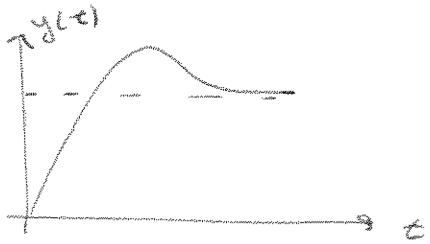
Egenskaper:

- Långt avstånd från origo ⟺ snabbt system e^{-at}
- Systemdynamiken domineras av den långsammaste polen
- Imaginära poler ger svängiga system
- Komplexa poler kommer alltid i par $\alpha \pm i\beta$
- Alla poler i VHP ⟺ stabilt system
  - Minnesregel: Varje pol dyker upp som en exponentialfunktion.

Nollställen:

Ett system $G(s)$ nollställen ges av de s för vilka istället täljaren är noll.

- Nollställen påverkar ej ett systems stabilitet.
- Kan påverka transienta egenskaper.
- Nollställe i VHP gör ofta upphov till en översläng



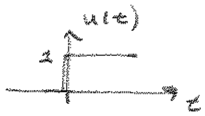
- Översläng är lätt att förväxla med svängning!
- Inte självklart hur nollställen påverkar systemets egenskaper.

Slutvärdessatsen:

Om alla nollskilda poler till $Y(s)$ ligger i VHP gäller

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s). \qquad \text{Boken } (2.31)$$

Exempel:

Om $u(t)$ är ett steg  är $U(s) = \frac{1}{s}$,

och

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s}$$

så

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} G(s)$$

om $G(s)$ är stabil.

Statisk förstärkning:

$|G(0)|$ kallas statisk förstärkning: hur mycket förstärks (förminskas) en konstant insignal när stationäritet har nåtts?

Begynnelsevärdessatsen:

På liknande sätt gäller att

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s)$$

om gränsvärdet existerar (se A.13).

Upg 2.10

- Stabilitet

Alla stegsvar är stabila, $y(t)$ konvergerar.

$\Longrightarrow$ Stryk G_6 som har pol i HHP.

- Statisk förstärkning

B och D har dubbelt så stort slutvärde som A och C. $|G(0)|$ är slutvärdet (den statiska förstärkningen) vid ett enhetssteg.

$\Longrightarrow$ Stryk G_2 och para

$G_1, G_4 \longrightarrow A, C$

$G_3, G_5 \longrightarrow B, D$

- Dominant pol

G_1 har två komplexa poler på samma avstånd.
G_4 har en reell pol på avstånd 2 och två komplexa på avstånd $\sqrt{5^2+(8.7)^2} \approx 10$.

$\Longrightarrow$ $G_1 \longrightarrow C$

$G_4 \longrightarrow A$ (eftersom reella är dominant)

G_3 har både komplexa och reella på ungefär samma avstånd (≈ 10).
G_5 har två komplexa på ≈ 10 och en reell på 3 (dominant).

$\Longrightarrow$ $G_3 \longrightarrow B$ (lite svängig)

$G_5 \longrightarrow D$

Upg 2.5

Instabila poler?

Para B, D $\longleftrightarrow$ 3, 6.

B:s överföringsfunktion är på formen $G_B(s) = \frac{k}{s}$.
Kom ihåg att ett stegsvar ges av $U(s) = 1/s$, så

$$Y(s) = G_B(s)\,U(s) = \frac{k}{s}\,\frac{1}{s} = k\,\frac{1}{s^2}.$$

Inverstransformera till

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{k\,\frac{1}{s^2}\right\}(t) = k\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) = \left\{(A.16)\right\} =$$

$$= k \cdot t.$$

6 är linjär, så

$B \longleftrightarrow 6$

$D \longleftrightarrow 3$.

Komplexa poler?

F är enda diagramet med komplexa poler, och 4 är det enda svängiga stegsvaret.

$\Longrightarrow$ $F \longleftrightarrow 4$

Slutvärde?

A är på formen $G_A(s) = \frac{s}{(s+a)(s+b)}$ (stabil).

Använd slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s}{(s+a)(s+b)}\,\frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s}{(s+a)(s+b)} = 0.$$

Av kvarstående stegsvar går bara 2 mot noll.

$\Longrightarrow$ $A \longleftrightarrow 2$.

stegsvar 5 har en liten översläng som ej kan uppkomma från de två reella stabila polerna i C.

$$\Longrightarrow \quad 5 \longleftrightarrow E$$

$$1 \longleftrightarrow C$$

Alternativt kan man använda begynnelsevärdessatsen för derivatan av y:

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}(s) = \lim_{s\to\infty} s\, s\, \mathcal{L}\{y(t)\}(s) =$$

$$= \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 G(s)\frac{1}{s} =$$

stegsvar

$$= \lim_{s\to\infty} sG(s)$$

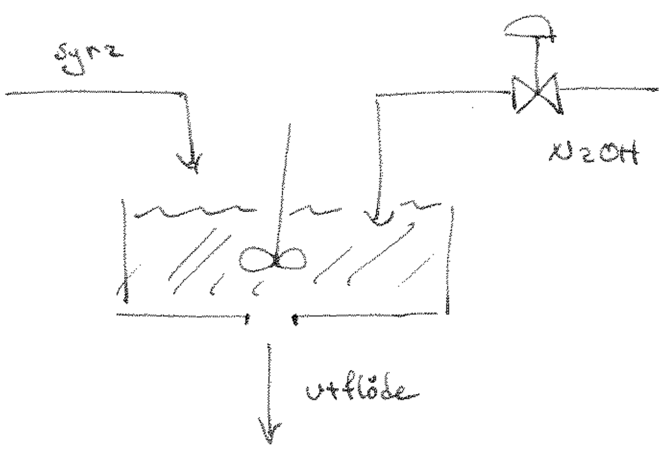
C är på formen $G_c(s) = \dfrac{k}{(s+a)(s+b)}$, så

$$\lim_{t\to 0} \dot{y}_c(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{sk}{(s+a)(s+b)} = 0,$$

vilket matchar stegsvar 1..

P.s.s. fås $\dot{y}_E(0) = 1$ som matchar stegsvar 5.

Upg 2.11

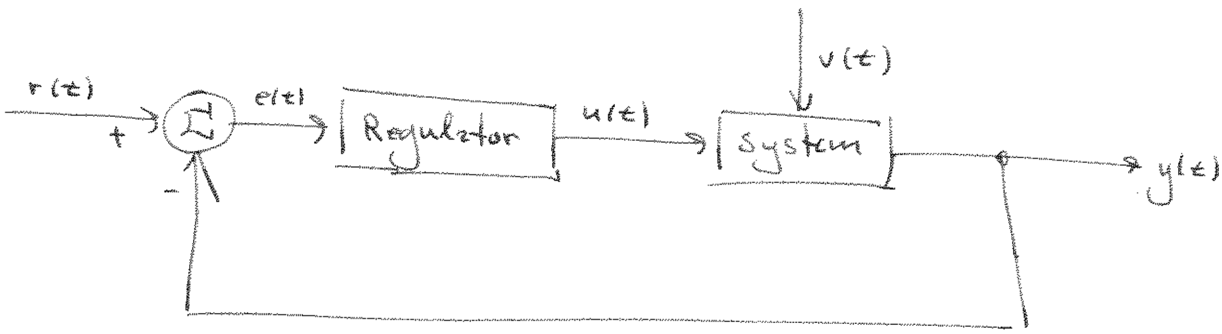


a, utsignal $y(t)$ - det vi vill styra, koncentrationen i utflödet

styrsignal $u(t)$ - det vi kan styra, inflödet av NaOH

störsignal $v(t)$ - det vi inte kan styra, inflödet och koncentrationen på syran

b, Antag att vi vill hålla pH-koncentrationen på nivån $r(t)$.



Vi kan t.ex. låta inflödet av NaOH vara direkt propotionellt mot felet i syra-koncentrationen.

(P-regulator)